

Bases de Données Relationnelles

L'algèbre relationnelle

(Chapitre 6)



Langages de manipulation

- Langages formels: base théorique solide
- Langages utilisateurs: version plus ergonomique
- Langages procéduraux: définissent comment dériver le résultat souhaité
- Langages assertionnels ou déclaratifs: définissent le résultat souhaité



2

LMD classiques

- Langages formels:
 - ◆ langages algébriques: définissent un ensemble d'opérateurs de manipulation
 - ◆ langages prédicatifs (calcul): définissent le résultat souhaité en utilisant des expressions de logique
- Langages utilisateurs BDR:
 - ◆ inspirés des langages algébriques: SQL
 - ◆ inspirés des langages prédicatifs: QBE, QUEL



3

L'approche algébrique

- Une algèbre est un ensemble d'opérateurs de base, formellement définis, qui peuvent être combinés à souhait pour construire des expressions algébriques
- Une algèbre est dite fermée si le résultat de tout opérateur est du même type que les opérandes (ce qui est indispensable pour construire des expressions)
- Complétude: toute manipulation pouvant être souhaitée par les utilisateurs devrait pouvoir être exprimable par une expression algébrique



4

L'algèbre relationnelle

- Opérandes: relations du modèle relationnel (1NF)
- Fermeture: le résultat de toute opération est une nouvelle relation
- Complétude: permet toute opération sauf les fermetures transitives
- Opérations unaires (une seule opérande): sélection (noté σ), projection (π), renommage (α)
- Opérations binaires: produit cartésien (\times), jointures (\bowtie), union (\cup), intersection (\cap), différence ($-$), division ($/$)



5

Préambule

- Pour chacune de ces 9 opérations, on donne :
 - ◆ l'opération
 - ◆ la syntaxe (notation)
 - ◆ la sémantique (résultat attendu)
 - ◆ le schéma
 - ◆ d'éventuelles remarques
 - ◆ un exemple



6

Sélection σ

- But: ne retenir que certains tuples dans une relation

Pays	nom	capitale	population	surface
	Autriche	Vienne	8	83
	UK	Londres	56	244
	Suisse	Berne	7	41

On ne veut que les pays dont la valeur de surface est inférieure à 100:

Petit-pays = σ [surface < 100] Pays

Petit-pays	nom	capitale	population	surface
	Autriche	Vienne	8	83
	UK	Londres	56	244
	Suisse	Berne	7	41

Sélection σ

- Opération unaire
- Syntaxe: σ [p] R
- p: prédicat de sélection (condition de sélection)
- < prédicat-élémentaire opérateur-logique prédicat-élémentaire >
- opérateur-logique \in { et, ou }
- prédicat-élémentaire :
 - [non] attribut opérateur-de-comparaison constante-ou-attribut
 - attribut est un attribut de la relation R
 - opérateur-de-comparaison \in {=, \neq , <, >, \leq , \geq }

Sélection σ

- sémantique : crée une nouvelle relation de population l'ensembles des tuples de R qui satisfont le prédicat p
- schéma (résultat) = schéma (opérande)
- population (résultat) \subseteq population (opérande)
- exemple : **Petit-pays = σ [surface < 100] Pays**

Petit-pays	nom	capitale	population	surface
	Autriche	Vienne	8	83
	UK	Londres	56	244
	Suisse	Berne	7	41

Projection π

- But: ne retenir que certains attributs dans une relation

Pays	nom	capitale	population	surface
	Autriche	Vienne	8	83
	UK	Londres	56	244
	Suisse	Berne	7	41

On ne veut que les attributs nom et capitale:

Capitales = π [nom, capitale] Pays

Capitales	nom	capitale	population	surface
	Autriche	Vienne	8	83
	UK	Londres	56	244
	Suisse	Berne	7	41

Projection π

- opération unaire
- syntaxe: π [attributs] R
 - attributs: liste l'ensemble d'attributs de R à conserver dans le résultat
- sémantique : crée une nouvelle relation de population l'ensembles des tuples de R réduits aux seuls attributs de la liste spécifiée
- schéma (résultat) \subseteq schéma (opérande)
- nb tuples (résultat) \leq nb tuples (opérande)
- exemple :

Effet de bord de la projection

- Elimination des doubles
 - une projection qui ne conserve pas la clé de la relation peut générer dans le résultat deux tuples identiques (à partir de deux tuples différents de l'opérande)
 - le résultat ne gardera que des tuples différents (fermeture)

R (B, C, D) π (B, C) R

b	c	d	→	b	c
a	a	b	→	a	a
a	a	c	→	a	a

trois tuples deux tuples

Sélection-projection

- On veut les capitales des petits pays:
 - Petit-pays = σ [surface < 100] Pays
 - Capitales = π [nom, capitale] Petit-pays

Capitale-petit-pays =

π [nom, capitale] σ [surface < 100] Pays

nom	capitale	population	surface
Irlande	Dublin	3	70
Autriche	Vienne	8	83
UK	Londres	56	244
Suisse	Berne	7	41

(Parties grise et beige à enlever)

Sélection-projection

Surface-petit-pays =

π [nom, surface] σ [surface < 100] Pays

σ [surface < 100] π [nom, surface] Pays

Capitale-petit-pays =

π [nom, capitale] σ [surface < 100] Pays

σ [surface < 100] π [nom, capitale] Pays **erreur!!!!**

π [nom, capitale] σ [surface < 100] π [nom, capitale, surface] Pays

Renommage α

- but: résoudre des problèmes de compatibilité entre noms d'attributs de deux relations opérands d'une opération binaire
- opération unaire
- syntaxe : α [nom_attribut : nouveau_nom] R
- sémantique : les tuples de R avec un nouveau nom de l'attribut
- schéma : schéma (α [n, m] R) le même que schéma (R) avec n renommé en m
- précondition : le nouveau nom n'existe pas déjà dans R
- exemple : $R2 = \alpha$ [B: C] R1

A	B
a	b
y	z
b	b

A	C
a	b
y	z
b	b

Produit cartésien \times

- but: construire toutes les combinaisons de tuples de deux relations (en général, en vue d'une sélection)
- syntaxe : $R \times S$
- exemple :

A	B
a	b
b	c
c	b

C	D	E
c	d	e
b	a	b
a	a	c

A	B	C	D	E
a	b	c	d	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	a
a	b	b	b	c
a	b	c	b	e
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b	a	a
a	b	c	b	a
a	b	c	c	b
a	b	b	a	a
a	b	c	a	c
a	b	b	b	c
a	b	c	c	e
a	b	b		

Jointure naturelle \bowtie

- opération binaire
- syntaxe : $R \bowtie S$
- sémantique : combine certains tuples
- schéma : schéma ($R \bowtie S$) = schéma (R) \cup schéma (S)
 - les attributs de même nom n'apparaissent qu'une seule fois
- la combinaison exige l'égalité des valeurs de tous les attributs de même nom de R et de S
 - si R et S n'ont pas d'attributs de même nom la jointure peut être dynamiquement remplacée par un produit cartésien

19

Theta-jointure $\bowtie [p]$

- but: créer toutes les combinaisons significatives entre tuples de deux relations
 - significatif = critère de combinaison explicitement défini en paramètre de l'opération
- précondition: les deux relations n'ont pas d'attribut de même nom
- exemple : $R \bowtie [B \neq C] S$

A	B
a	b
b	c
c	b

C	D	E
b	c	d
b	a	b
c	a	c

A	B	C	D	E
a	b	c	a	c
b	c	b	c	b
b	c	b	a	a
c	b	c	a	c

20

Theta-jointure $\bowtie [p]$

- opération binaire
- syntaxe : $R \bowtie [p] S$
 - p: prédicat/condition de jointure
 - < prédicat-élémentaire et/ou prédicat-élémentaire >
- sémantique : combine les tuples qui satisfont le prédicat
- schéma ($R \bowtie [p] S$) = schéma (R) \cup schéma (S)

21

Union \cup

- opération binaire
- syntaxe : $R \cup S$
- sémantique : réunit dans une même relation les tuples de R et ceux de S
- schéma : schéma($R \cup S$) = schéma(R) = schéma(S)
- précondition : schéma(R) = schéma(S)
- exemple :

A	B
a	b
b	b
y	z

A	B
u	v
y	z

A	B
a	b
b	b
y	z
u	v

22

Intersection \cap

- opération binaire
- syntaxe : $R \cap S$
- sémantique : sélectionne les tuples qui sont à la fois dans R et S
- schéma : schéma ($R \cap S$) = schéma (R) = schéma (S)
- précondition : schéma (R) = schéma (S)
- exemple :

A	B
a	b
y	z
b	b

A	B
u	v
y	z

A	B
y	z

23

Différence $-$

- opération binaire
- syntaxe : $R - S$
- sémantique : sélectionne les tuples de R qui ne sont pas dans S
- schéma : schéma ($R - S$) = schéma (R) = schéma (S)
- précondition : schéma (R) = schéma (S)
- exemple :

A	B
a	b
y	z
b	b

A	B
u	v
y	z

A	B
a	b
b	b

24

La division /

- but: traiter les requêtes de style «les ... tels que TOUS les ...»
- soient $R(A_1, \dots, A_n)$ et $V(A_1, \dots, A_m)$ avec $n > m$ et A_1, \dots, A_m des attributs de même nom dans R et V
- $R/V = \{ \langle a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n \rangle \mid \forall \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \in V, \exists \langle a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n \rangle \in R \}$
- exemples :

A	B	C
1	1	1
1	2	1
1	2	0
1	3	1
2	1	0
2	3	1
3	2	1
3	2	0
3	2	1

B	C
1	1
2	0

A
1
3

B	C
3	5

A
/

25

Exemple

- R

STUDENT	COURSE	PASSED
François	BDR	yes
François	Prog	yes
Jacques	BDR	yes
Jacques	Math	yes
Pierre	Prog	yes
Pierre	BDR	no

- V

COURSE	PASSED
Prog	yes
BDR	yes

- R/V

STUDENT
François

26

Equivalences

- $R \cap S = S \cap R$, $R \bowtie S = S \bowtie R$, etc.
- $\sigma [p_1] (\sigma [p_2] R) = \sigma [p_2] (\sigma [p_1] R) = \sigma [p_2 \text{ et } p_1] R$
- $\sigma [p] (\pi [a] R) = \pi [a] (\sigma [p] R)$ si attributs(p) \subseteq a
- etc.

27

Exemples de requêtes algébriques

- Soient les relations suivantes :

Journal (code-j, titre, prix, type, périodicité)

Dépôt (no-dépôt, nom-dépôt, adresse)

Livraison (no-dépôt, code-j, date-liv, quantité-livrée)

28

Répondre aux requêtes suivantes :

- Quel est le prix des journaux ?
- Donnez tous les renseignements connus sur les journaux hebdomadaires.
- Donnez les codes des journaux livrés à Bienne.
- Donnez les numéros des dépôts qui reçoivent tous les journaux.

29