Gilles HUNAULT

2003

Rappels mathématiques

Université d'Angers

" Il nous semble que, dans les "grandes" nations surdéveloppées scientifiquement et techniquement où nous vivons, le premier devoir des mathématiciens, et de beaucoup d'autres, serait plutôt de fournir ce qu'on ne leur demande pas – à savoir des hommes capables de réfléchir par eux-mêmes, de dépister les arguments faux et les phrases ambiguës – et aux yeux desquels la diffusion de la vérité importerait infiniment plus que, par exemple la Télévision planétaire en couleurs et en relief : des hommes libres, et non pas des robots pour technocrates. Il est tristement évident que la meilleure façon de former ces hommes qui nous manquent n'est pas de leur enseigner les sciences mathématiques et physiques, ces branches du savoir où la bienséance consiste, en premier lieu, à faire semblant d'ignorer jusqu'à l'existence de problèmes humains, et auxquelles nos sociétés hautement civilisées accordent, ce qui devrait paraître louche, la première place. Mais même en enseignant les Mathématiques, on peut du moins essayer de donner aux gens le goût de la liberté et de la critique, et les habituer à se voir traités en êtres humains doués de la faculté de comprendre. "

Roger GODEMENT, 1962,

Préface au *Cours d'Algèbre* chez Herman.

Table des matières

Introduction

Les mathématiques sont une science qui sert à calculer mais aussi à décrire. Elles reposent sur un langage formel, précis qu'il importe de maîtriser pour savoir communiquer les résultats trouvés. Les conventions d'écriture qu'elles imposent sont à la fois arbitraires, restrictives et quasi-universelles. Elles permettent surtout de donner une précision quelconque (qui peut aller à l'infini puisqu'elles sont capables de définir leur propre auto-référence et leurs propres limites) et une normalisation de description : rigueur et clarté en sont donc les maîtres-mots.

Une première difficulté pour maîtriser ce "langage sans mot" est de s'abstraire d'une certaine réalité. Lorsqu'on dit que x désigne un "objet", par exemple un nombre entier, on fait référence à un nombre "anonyme", sans saveur, sans odeur, presque sans intérêt. Il ne devient remarquable qu'avec des propriétés, qu'elles soient positives (x vérifie...) ou négatives (x ne vérifie pas...). Il est donc "dur" de connaître ou de reconnaître x avec si peu d'informations. Une deuxième difficulté est l'expérience. Il faut de l'entraînement, de l'habitude pour savoir décomposer, décortiquer une formule, pour emboîter des résultats intermédiaires en un théorème important. Le débutant, la débutante seront au début un peu perdu(e) dans la "jungle", le florilège des expressions mathématiques. Ainsi, une définition de la continuité d'une fonction f en a s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; ; \; |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Un habitué des mathématiques n'écrit pas cette formule de gauche à droite mais plutôt de façon "tordue", commençant par $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pour traduire $f(x)$ est proche de $f(a)$ ce qui oblige à rajouter à l'extrême gauche $\forall \varepsilon > 0$. Cette proximité doit être déclenchée pour x proche de a soit à écrire $|x - a| < \eta$ et pour que tout s'articule sous la forme $Q \; ; \; X \Rightarrow F$ il faut mettre $\exists \eta > 0$ et l'implication $\Rightarrow$ "là où il faut". Sur cet exemple, on voit l'adresse que requiert ce genre de formule pour être bien gérée, adresse qui ne vient qu'avec la pratique.

Une autre définition – bien sûr équivalente à la précédente – de la continuité de la même fonction f au même point a s'écrit

$$\lim_{x \to a} f = f(a)$$

c'est bien plus compact, plus "joli" mais du coup, on ne sait plus par où commencer. La formule précédente avait au moins le mérite de donner le mode opératoire : on fixe ε et on essaie d'en déduire η. A chacun sa formule...

C'est pourquoi nous avons parsemé les définitions et exemples de nombreux (petits) exercices. Certains sont "bêtes" c'est à dire qu'ils ne servent qu'à calculer en application directe des formules sus-citées. D'autres sont astucieux et demandent du "bricolage". Certains autres, enfin, risquent d'embrouiller un lecteur, une lectrice débutant(e) car ils sont là pour montrer jusqu'à quelle sophistication on peut arriver si on pousse au bout (ou au degré 2, au degré n) telle définition, tel calcul...

A la question fameuse *"Faut-il faire les exercices dans la foulée ou après avoir lu tout le chapitre ?"* nous laissons une entière liberté de réponse.* Par contre, nous ne donnons aucun problème, aucun prolongement détaillé des objets et structures employés. Nous renvoyons pour cela à des ouvrages de mathématiques plus traditionnels, par exemple ceux cités dans notre bibliographie succinte.

Au-delà des notations, des formules, notre grand souhait est qu'à la suite de la lecture de cet ouvrage, les lecteurs et lectrices sachent un peu mieux ce que sont les mathématiques même si on peut "faire" ces mathématiques sans comprendre ce qu'elles sont. L'enjeu sous-jacent à une telle compréhension pourrait être de pouvoir apprécier à sa juste valeur l'*Imaginaire Mathématique* qui sous-tend de telles représentations, pour être mieux armé et mieux savoir se défendre dans un monde où la pseudo-scientificité d'un certain nombre d'arguments a force de loi, ce qui fait des mathématiques la "Reine des Sciences" c'est à dire l'Esclavagiste Suprême dont l'Ordinateur et les Statistiques sont les acolytes zélés.

* puisque notre question exclut donc de ne **pas** faire les exercices.

Chapitre 1.

Ensembles et Fonctions

1.1 Ensembles

Les ensembles sont souvent le premier type de structure que l'on manipule en mathématiques. Intuitivement, un ensemble est une "collection", un "regroupement". Mais seule une définition abstraite que les mathématiciens en donnent, via une axiomatisation rigoureuse aboutit à des paradoxes. Ainsi, "un ensemble contient des éléments", "un ensemble ne peut pas être un élément de lui-même", mais qu'est-ce alors que l'ensemble dont les éléments sont les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes ? Passer à ce niveau de discours théorique (ou rhétorique ?) est loin des calculs élémentaires que nous proposons ici.

La notation $x \in E$ indique que x est élément de E. Classiquement, les éléments sont désignés par des lettres minuscules et les ensembles par des majuscules. Pour indiquer que E contient les éléments x, t et u seulement, on borne la liste x, t, u par des accolades, soit l'écriture $E = \{ x, t, u \}$. L'ordre n'a aucune importance et donc le E cité est aussi $\{ x, u, t \}$. En particulier, nous manipulerons beaucoup des ensembles de nombres comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et ce peut être une bonne habitude que d'ordonner les éléments des ensembles considérés.

Exercice 1.1

Un ensemble contient des éléments distincts possiblement ordonnés. Donc $\{x, x\}$ et $\{x\}$ désignent le même ensemble. De même : $\{x, y\} = \{y, x\}$. Mais combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble $\{x, y\}$?

$\diamondsuit$

Même s'il est un peu "surprenant" d'écrire $E = \{ x, y, x, x \}$, cette notation est correcte et se réduit à $E = \{ x, y \}$. Ce genre d'écriture arrive lorsque qu'on construit automatiquement des ensembles, par exemple avec un programme informatique.

Lorsqu'on veut définir un ensemble, on peut donner la liste de ses éléments, s'il y en a peu (*définition en extension*) comme pour $E = \{ 6, 28, 496 \}$ ou par une propriété remarquable (*définition en compréhension*) comme pour $F = \{ x \; ; \; x \in \mathbb{R}$ et x est pair, inférieur à $20 \}$. Enfin, dans certains cas,"on s'accorde à penser" que tout le monde comprend le mode de formation de l'ensemble considéré et on n'en donne que les les premiers éléments comme par exemple $\{ 2, 4, 6, 8... \}$.

Exercice 1.2

Combien y a-t-il de voyelles ?

$\diamondsuit$

Si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble F, on dit que F est inclus dans E, noté $F \subset E$ et on invente l'égalité de deux ensembles par la formule $E = F \Leftrightarrow F \subset E$ et $E \subset F$. Si besoin est, on détaille $\subset$ en $\subseteq$ et $\subsetneq$ pour distinguer "inclus ou égal" de "inclus et différent". Un ensemble peut ne rien contenir : on note $\emptyset$ l'ensemble ne contenant aucun élément qu'on nomme *ensemble vide*. Un ensemble peut aussi contenir des ensembles : si $A = \{x, y\}$ et $B = \{ x \}$ alors l'ensemble $E = \{ A, B \}$ est en fait l'ensemble $E = \{ \{x, y\} \; , \; \{x\} \}$. Ainsi pour E donné, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ défini par $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E, nommé *puissance de* E ou *ensemble des parties de* E. On notera qu'il est équivalent d'écrire $x \in E$, $\{ x \} \subset E$ et $\{ x \} \in \mathcal{P}(E)$, confusant, non ?

Exercice 1.3

Soit D l'ensemble des nombres entiers de 0 à 10, D^* l'ensemble des nombres entiers de 1 à 10, D^{**} l'ensemble des nombres entiers strictement positifs entre -1 à 10, D_P l'ensemble des nombres pairs dans D, D_I l'ensemble des nombres impairs dans D, D_P^* l'ensemble des nombres pairs dans D^*. Donner toutes les relations possibles entre ces ensembles pour l'inclusion $\subseteq$. Comment faire pour n'en oublier aucune ?

$\diamondsuit$

Exercice 1.4

Pour $E = \{\ a, b, c\ \}$ donner $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\ \mathcal{P}(E)\ )$.

$\diamondsuit$

Opérations ensemblistes

Les opérations classiques associées aux ensembles sont l'union et l'intersection notées respectivement $\cup$ et $\cap$ définies par

$$A \cup B = \{\ x \in E\ ;\ (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\ \}$$

$$A \cap B = \{\ x \in E\ ;\ (x \in A) \text{ et } (x \in B)\ \}$$

La différence entre un ensemble et un autre, notée classiquement $\backslash$ permet, pour un ensemble E de référence, d'introduire les opérations de complémentation d'un sous-ensemble de E par rapport à E et de différence symétrique entre deux ensembles, notées respectivement $\complement_E$ et Δ :

$$\begin{array}{ll} A\backslash B & = \{\ x \in E\ ;\ x \in\ A \text{ et } x \notin\ B\ \} \\ A\Delta B & = A\backslash B\ \cup\ B\backslash A. \\ \complement_E\ A & = E\backslash A. \end{array}$$

Si $A \cap B = \emptyset$ alors l'union de A et B est dite *disjointe*, notée $A \biguplus B$ ou encore $A \bigsqcup B$. Il est possible (et commode) de paraphraser les définitions mathématiques, tel $A \cup B$ défini comme l'ensemble $\{x\ ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$ et qui peut être décrit comme l'ensemble des éléments qui sont contenus soit dans A soit dans B en acceptant les éléments qui sont dans les deux en même temps. $A_1 \cup A_2 \cup ...A_i...$ se note $\bigcup A_i$.

Des sous-ensembles A_i d'un ensemble E en forment un recouvrement si $\bigcup A_i = E$. Au cas où les A_i sont disjoints deux à deux (ce qui signifie $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) on dit qu'ils réalisent une partition de E. Par contre, si les A_i vérifient $A_i \cap A_j \in \{\emptyset, A_i, A_j\}$ on parle de hiérarchie.

Exercice 1.5

Montrer que toute union d'ensembles peut être rendue disjointe.

$\diamondsuit$

Exercice 1.6

Compléter le tableau suivant où A, B, C et E sont des ensembles avec $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E^*$, et où X désigne soit A, soit B, soit C :

$\emptyset \cap E \quad =$	
$\emptyset \cup E \quad =$	
$A \ \cup \ E \quad =$	
$X \ \cap \ E \quad =$	
$(X \cap B) \ \cup \ C \quad =$	

$\diamondsuit$

Exercice 1.7

Soit E l'ensemble des entiers de 1 à 10 et X_i l'ensemble $\{ \ i, i+1, i+2 \ \}$. La famille $\{ \ X_1, \ X_3, \ X_6, \ X_8 \ \}$ est-elle un recouvrement de E ? une partition de E ? Trouver toutes les familles $\{ \ X_j \ \}$ qui sont une partition de E.

$\diamondsuit$

Exercice 1.8

La famille suivante constitue-t-elle une hiérarchie ? Si ce n'est pas le cas, essayer d'utiliser un maximum d'ensembles de cette famille pour former une hiérarchie.

$$\mathcal{F} \ = \ \{ \ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$\diamondsuit$

* ce qui ne signifie aucunement que les seuls sous-ensembles de E sont A, B et C.

Quantificateurs et Connecteurs

Les mathématiques classiques réussissent à tout exprimer avec deux quantificateurs universel et existentiel : $\forall$ (quelque soit, pour tous) et $\exists$ (il existe, au moins un) qui sont, "bien sûr" et "quelque part" la négation l'un de l'autre. On utilise aussi les connecteurs logiques $\wedge$ ("et"), $\vee$ ("ou"), $\neg$ ("non"), $\Rightarrow$ ("implique") et $\Leftrightarrow$ ("équivaut à").

Sachant par exemple $\neg$, $\vee$ et $\forall$ on définit classiquement les autres connecteurs par

$$\begin{array}{lcl} A \ \wedge \ B & = & \neg \ (\ (\neg A) \vee (\neg B) \ ) \\ A \ \Rightarrow \ B & = & (\neg A) \vee B \\ A \ \Leftrightarrow \ B & = & (A \ \Rightarrow \ B) \wedge (B \ \Rightarrow \ A) \\ \exists x \ P(x) & = & \neg(\ \forall x ; \neg P(x) \ ) \end{array}$$

La définition et la construction d'ensembles peut alors se faire par des formules logiques. On peut ainsi écrire et définir :

$$\begin{array}{lcl} A \cap B & = & \{x \ ; \ (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\ & \text{soit} & (\ \forall x, \ (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \ ) \\ E \backslash A = \complement_E A & = & \{x \ ; \ (x \in E) \wedge (x \notin A)\} \\ A \subset B & = & \{x \ ; \ \text{ si } x \in A \text{ alors } x \in B\} = \{x \ ; \ x \in A \Rightarrow x \in B\} \end{array}$$

Exercice 1.9

Soient c une variable qui correspond au mot "clé", b une variable qui correspond au mot "bureau" et f la fonction "ouvre" qui s'interprète comme suit : $f(c,b)$ signifie "la clé c ouvre le bureau b". Traduire en langage naturel la formule

$$\exists\, c \ \forall\, b \ f(c,b)$$

Donner sa négation en formule et en langage naturel. Donner aussi l'interprétation des formules

$$\forall\, b \ \exists\, c \ f(c,b)$$

$$\exists\, b \ \forall\, c \ \neg f(c,b)$$

$\Diamond$

Le produit cartésien ExF des deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (ordonnés) composés dans cet ordre d'un élément de E et d'un élément de F. Pour trois ensembles, on parle de triplets ou de 3-uples et plus généralement de n-uples ou de n-uplets pour le produit de n ensembles ; en particulier on note E^n le produit de E avec lui-même $n-1$ fois (ce qui donne bien n fois E en tout).

Exercice 1.10

Quels sont les éléments de E x $\mathcal{P}(E)$?

$\diamondsuit$

Bien qu'intuitive, la notion d'ensemble est délicate à définir. Le *nombre d'éléments* d'un ensemble aussi. On se doute qu'un ensemble avec 3 éléments est plus "petit" qu'un ensemble avec 5 éléments, mais comment appréhender la différence entre l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers relatifs ? Peut-on vraiment dire qu'il y a deux fois plus d'éléments dans $\mathbb{Z}$ que dans $\mathbb{N}$?

Et que dire alors du rapport entre le nombre d'éléments de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$?

A ces questions profondes, délicates, il existe des réponses qui inventent des nouveaux nombres, dits "ordinaux" en opposition aux "cardinaux" ; des nombres finis on passe aux infinis, aux transfinis, avec des calculs et des raisonnements non "évidents"... A partir de symboles presque classiques comme ∞, (avec ou sans signe), on débouche sur des nombres "mystérieux" comme les $\aleph$ (prononcer "aleffe"), on rêve en apprenant que le "bout" de $\mathbb{R}$ vu comme une ligne est l'autre bout de la ligne, c'est à dire lui même !

L'hypothèse "magique" de la *puissance du continu* se révèle être une source d'ambiguïtés cohérentes (et c'est sans doute la façon la plus claire de le dire), de même que les travaux de *Goedel* sur l'incomplétude montrent qu'on peut toujours arriver à construire une méta-théorie (c'est à dire une théorie sur la théorie) dans laquelle certaines formules sont inaccessibles, c'est à ni dire ni vraies ni fausses, ce qui bien sûr n'est pas possible pour un être humain doué de raison et de bon sens...

On notera aussi que la théorie des ensembles est intimement liée à la logique élémentaire, celle du "tiers exclu", du *modus ponens* et du *modus tollens* c'est à dire une logique primaire (et binaire à la fois) dans laquelle on ne peut pas tout dire ni tout calculer, sauf à rester dans le cadre strict et limité des mathématiques. C'est pourquoi l'Intelligence Artificielle qui veut que les machines raisonnent comme les êtres humains a besoin d'autres logiques...

1.2 Fonctions

Une fonction met en jeu des ensembles et définit une "relation" entre éléments. On notera (ou : "il ne faut pas oublier") que $f : x \mapsto x/2$ n'est pas une fonction car une fonction n'est pas définie seulement par la relation fonctionnelle entre les éléments x et $f(x)$ mais aussi par les ensembles de départ et d'arrivée ce qui se note traditionnellement $f \ : \ E \ \rightarrow \ F$. Une fonction peut être injective, surjective, bijective, croissante, involutive, posséder un point fixe, être majorée, minorée...

Exercice 1.11

Trouver trois interprétations de $f(x)$ comme résultat de l'application d'une fonction. Ecrire f comme un triplet.

$\diamondsuit$

Ainsi, suivant qu'il s' agit d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on n'obtient pas les mêmes propriétés pour f. En particulier, on peut avoir des "fonctions fonctionnelles" qui à une fonction associent à une autre fonction, comme *Dériv* : $g \mapsto g'$. On note souvent F^E ou encore $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F.

Une fonction mathématique classique est *univaluée* ou *univoque* c'est à dire à une seule valeur résultat, soit encore déterministe : une relation comme $x \mapsto \{\ x, x+1, x/2\ \}$ n'est donc pas reconnue comme pouvant donner une "bonne et belle" fonction du secondaire ; elle est dite multivoque, c'est à dire non déterministe. On prendra soin de ne pas la confondre avec la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $x \mapsto (x, x+1, x/2)$.

Parmi les fonctions classiques, on distingue les fonctions à une variable (du secondaire), les lois de composition (souvent à deux variables mais sans le dire ou avec une notation infixe) et les relations (classiquement binaires). Plutôt que de fournir un cours typique, nous nous bornerons à des rappels en quelques pages de "pot-pourri" avec définitions, formules, (contre)exemples et remarques. Un lecteur consciencieux aura déjà beaucoup de travail à (re)vérifier, à (re)démontrer tous ces exemples.

L'enchaînement de deux fonctions est nommé la composition, notée o et se fait dans un ordre strict. Lorsque cela peut avoir un sens, on définit $f^p(x)$ par application de p fois f sur x : $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$... On pourra donc trouver une valeur "raisonnable" à l'expression $f^0(x)$.

Une fonction peut s'appliquer à "tout ce qui bouge", que ce soit des nombres, des ensembles, des fonctions... Une opération comme $A \mapsto \complement_E A$ – qui associe à A son complémentaire dans E – est une fonction à une seule variable qui est un ensemble. Une autre fonction classique à connaître pour les ensembles est celle qui associe à un ensemble son nombre d'éléments ; on la note Card ou encore # ou $|...|$. C'est donc une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour les ensembles finis. Pour les ensembles infinis, c'est une autre histoire ! Les fonctions numériques classiques (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) sont les polynômes, les fonctions puissances, exponentielles, logarithmes, trigonométriques... qui seront détaillées un peu plus loin en même temps que les fonctions homographiques, paraboliques etc.

Si f est une fonction de E dans F, l'ensemble $\{\ y\ ;\ y = f(x) \text{ pour } x \in E\ \}$ est appelé image de E (ou de f) et noté $Im(f)$ ou $f(E)$; cette dernière notation est dangereuse pour les débutants car E est un ensemble et $f(E)$ désigne donc l'ensemble des images : $f(E) = \{\ y\ ;\ \exists\ x\ ;\ y\ =\ f(x)\ \}$ soit encore l'ensemble $\{\ f(x)\ ;\ x \in E\ \}$. Quand $y = f(x)$, y est l'image de x et x l'antécédent de y. Attention : certains éléments x de E peuvent ne pas avoir d'image, comme $x = 1$ pour la fonction $x \mapsto 1/(x-1)$ et certains éléments y de F peuvent ne pas avoir d'antécédent comme $y = -1$ pour $x \mapsto x^4 + 1$. Lorsque $F = E$, on invente la définition "A est stable par f"" qui correspond à la condition $f(A) \subset A$.

L'image réciproque d'un élément y de F est l'ensemble des x dont l'image est y : $Rec(y) = \{x \in E\ ;\ y = f(x)\}$. Tout naturellement, l'image réciproque d'un sous-ensemble G de F est l'ensemble des x dont l'image est dans G et (bien sûr !) on peut confondre $Rec(y)$ avec $Rec(\{y\})$. **Attention** : la notation classique $Rec(y) = f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$ est dangereuse car elle se confond avec celle de fonction réciproque qui n'existe que quand f est bijective.

On remarquera qu'à coté de "belles" et nombreuses propriétés "évidentes" comme $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ on trouve de temps en temps des formules qui limitent, comme "seulement" $f(A \cap B) \subset f(A)\ \cap\ f(B)$. D'autres définitions et propriétés "intéressantes" sont omises ici, comme

$$f \text{ injective} \quad \Rightarrow \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, X\ f^{-1}(\ f(X)\ ) = X$$

$$f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, X\ f(\ f^{-1}(Y)\ ) = Y$$

Exercice 1.12

Un coup de vent malencontreux (!) a perturbé les exemples et contre-exemples des définitions suivantes. Retrouvez les propriétés pour chacune des lignes proposées.

Fonction croissante : $\forall x, y \in E \; ; \; x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$x \mapsto ax + b$

$x \mapsto 1/x$

Fonction minorée : $\exists p \, \forall x \in E \; : \; p \leq f(x)$

$x \mapsto x$

$x \mapsto x^2$

Fonction injective : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$x \mapsto x + 1$

$x \mapsto x^4$

Fonction surjective : $\forall x \in F \; \exists x \in E \; ; \; y = f(x)$

$x \mapsto x^2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

$x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$

Fonction bijective : $\forall x \in F \; \exists x \in E \; ; \; y = f(x)$ et x unique

$x \mapsto x^3$

$x \mapsto sin(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Fonction à point fixe : $\exists t \in E \; ; \; t = f(t)$

$x \mapsto 2x - 1/2$

$x \mapsto 1 + x$

Limite b de f en a : $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0; |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$x \mapsto log(x)$

$x \mapsto (x - 1)(x + 1)/(x^6 - 1)$ en $x = -1$

$\diamondsuit$

Contrairement à une fonction classique qui n'utilise qu'une seule variable, une loi de composition f sur E dans F est une fonction de ExE dans F et requiert donc deux variables. On note aussi xfy comme pour $x+y$, $x \cap y$ etc. Plus généralement, on peut définir la notion de loi ou opération à partir de E^n vers F. Très souvent, on se restreint à $F = E$ (*loi interne*).

Les propriétés classiques des lois se nomment associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, etc. Des notions fines de latéralité peuvent être ajoutées (neutre à droite, symétrique à gauche...) mais les notions d'unicité pour les éléments neutre, symétrique... sont alors plus délicates. D'autres propriétés surviennent quand on dispose de deux lois, (distributivité de l'une par rapport à l'autre, d'un côté seulement etc.). La notion d'itérée n'est a priori intéressante que pour les lois commutatives et associatives.

Les relations entre éléments d'un même ensemble E sont des fonctions à résultat booléen ("vrai" ou "faux" ou encore `0` et `1`). On peut aussi les considérer comme des sous-ensembles (graphes) du produit cartésien ExE : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x,y) \in Graphe(\mathcal{R})$. Les adjectifs des propriétés associées aux relations sont partielle, totale, (ir)réflexive, (anti)symétrique, transitive... En particulier une relation d'équivalence est réflexive, symétrique, transitive et induit une partition sur l'ensemble quotient noté $E/\mathcal{R}$. Une relation d'ordre large est réflexive, antisymétrique et transitive ; une relation d'ordre strict est irréflexive, antisymétrique et transitive.

L'intérêt de ces notions est qu'elle sont souvent très générales et qu'elles peuvent donc s'appliquer à des nombres, à des ensembles, à des fonctions. Avec un peu d'imagination, certains mots peuvent mêmes s'appliquer aux êtres humains. Ainsi *les amis de mes amis sont mes amis* décline une relation de transitivité...

Il est important de comprendre que la structuration des ensembles classiques comme $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$... ne se fait pas uniquement sur des propriétés algébriques mais aussi sur des considérations d'analyse. Ainsi $(\mathbb{Z},+)$ est le groupe engendré par $(\mathbb{N},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$ est en le corps des fractions, mais $\mathbb{R}$ ne peut être défini que comme l'adhérence de $\mathbb{Q}$, c'est à dire que par la relation $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x$ est la limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$. De même, le passage à $\mathbb{C}$ qui résout l'équation $x^2+1=0$ comme $\mathbb{Z}$ résolvait $x+1=0$ s'accompagne d'une perte de compatibilité de la relation d'ordre naturelle ($\leqslant$). On ne "compare" donc pas des complexes ! Le passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{H}$, ensemble des "quaternions" et à $\mathbb{O}$, ensemble des "octonions" (de dimensions respectives 4 et 8 en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) vient à son tour perdre l'associativité et l'intégrité ($x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$).

Par contre, et nous laisserons le lecteur sur sa faim quant aux démonstrations, on ne peut pas passer à une structure de sur-corps compatible de dimension supérieure (donc de dimension 16). De même, on ne peut construire d'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ qui soit un corps dont les lois sont compatibles avec celles de $\mathbb{R}$ et avec sa relation d'ordre. Bizarre, non ?

Nous vous proposons pour vous entraîner avec les propriétés des relations, un premier exercice avec des exemples et des contre-exemples :

Exercice 1.13

Voici une liste de définitions, d'exemples et de contre-exemples. A vous de retrouver qui est qui.

Relation antisymétrique	$\forall x, y \in E\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
Relation irréflexive	$\forall x, y \in E\ x\mathcal{R}y \Rightarrow x \neq y$
Relation partielle	c'est une relation non totale
Relation réflexive	$\forall x \in E\ x\mathcal{R}x$
Relation symétrique	$\forall x, y \in E\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
Relation totale	$\forall x, y \in E\ x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$
Relation transitive	$\forall x, y, z \in E\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Relations proposées :

$E\mathcal{R}F \Leftrightarrow$	les ensembles E et F ont une intersection vide
$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow$	$\forall x \ \ f(x) \geq g(x)$
$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow$	les polynômes p et q ont une racine commune
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	x est une puissance de y
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	$x - y > 0$
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	$x \geq y$
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	$x + y$ est pair
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	x ou y est pair
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	x et y sont pairs
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$	x divise y

$\diamondsuit$

Voici un autre exercice, aussi simple mais plus intéressant car plus complet (pourquoi ?) :

Exercice 1.14

Compléter le tableau suivant.

Relation	Réflexive	Symétrique	Transitive
$x - y$ est pair			
$x \cap y \neq \emptyset$			
$x \leq y$			
$x + 10 \geq y$			
$1 \in x \cap y$			
$x + y$ est impair			
x divise y et $x < y$			
$x = y^2$			

$\diamondsuit$

Pour finir ce chapitre, voici encore un exercice qui devrait vous donner un peu de "culture" : il s'agit d'appliquer les lois de compositions aux nombres, aux ensembles quelconques et aux ensembles de fonctions.

Par culture, nous entendons ici à la fois des connaissances (comme ce qu'est le `ppmc` de deux nombres, ou leur `pgcd` car cela ne signifie pas "plus petit monsieur coquin" ni la "plus grande chose donnée") mais aussi du recul sur les "objets" manipulés. A force de calculer, on finit par ne plus raisonner, à force de raisonner, on finit par oublier le but du calcul... Si la culture en mathématiques passe par l'expérience (il faut avoir déjà "vu" la fonction *identité* pour se rendre compte que c'est une bonne "candidate" comme élément neutre pour la composition des applications), elle demande aussi une bonne mémoire : de nombreux calculs s'emboîtent, des définitions se complètent et s'il fallait repartir à zéro pour chaque exemple et chaque contre-exemple, il faudrait doubler les pages de ce manuel.

On trouvera à la fin de l'ouvrage non seulement toutes les solutions des exercices mais aussi une (légère) introduction à *Maple*, logiciel qui permet de faire de nombreux calculs mathématiques, y compris formels, ce qui pour certain(e)s peut aider à vérifier ou à remplacer les calculs, le tracé des courbes...

Exercice 1.15

Pour chaque loi qui suit, dire s'il s'agit d'un exemple ou d'un contre-exemple.

Lois de composition avec des nombres dans $\mathbb{Z}$

Loi interne : $\forall\, x, y \ \in E \ f(x, y) \in E$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

$(x, y) \rightsquigarrow x - y$

Loi commutative : $\forall\, x, y \ \in E \ f(x, y) = f(y, x)$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y - (x + y)$

$(x, y) \rightsquigarrow x^y$

Loi associative : $\forall\, x, y, z \ \in E \ f(\ f(x, y), z\ ) = f(\ x, f(y, z)\ )$

$(x, y) \rightsquigarrow min(x, y)$

$(x, y) \rightsquigarrow (x + y)/2$

Elément neutre e : $\exists\, e\ \forall\, x \ \in E \ f(x, e) = f(e, x) = x$

$(x, y) \rightsquigarrow ppmc(x, y)$

$(x, y) \rightsquigarrow pgcd(x, y)$

Elément symétrique s de x : $\forall x\ \exists\ s\ f(x, s) = f(s, x) = e$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

$(x, y) \rightsquigarrow ppmc(x, y)$

Elément idempotent i : $\exists\ i\ \exists\ p\ f^p(i) = i$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y - 1$

Elément nilpotent n : $\exists\ n\ \exists\ p\ f^p(n) = e$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

$(x, y) \rightsquigarrow x - y + 1$

Elément absorbant a : $\exists\ a\ \forall\ x\ f(a, x) = f(x, a) = a$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y + 1$

Elément simplifiable s : $\forall\ x, y\ f(x, s) = f(y, s) \Rightarrow x = y$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y$

$(x, y) \rightsquigarrow max(x, y)$

Lois de composition avec des ensembles

Loi interne : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A, B) \in \mathcal{P}(E)$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow max(A \cap B)$

Loi commutative : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A, B) = f(B, A)$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \backslash B$

Loi associative : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)\ f(\ f(A, B), C\ ) = f(\ A, f(B, C)\ )$

$(A, B) \rightsquigarrow \{\ max(A \cap B)\ \}$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

Elément neutre N : $\exists\ N\ \forall A \in \mathcal{P}(E)\ f(A, N) = f(N, A) = A$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B \backslash A \cap B$

$(A, B) \rightsquigarrow E \backslash (A \cap B)$

Elément symétrique S de A : $\forall A\ \exists\ S\ f(A, S) = f(S, A) = E$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

Elément idempotent I : $\exists\ I\ \exists\ p\ f^p(I) = I$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

Elément nilpotent M : $\exists\ M\ \exists\ p\ f^p(M) = N$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cap B$

Elément absorbant G : $\exists\ G\ \forall\ A\ f(G, A) = f(A, G) = G$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \backslash B$

Elément simplifiable S : $\forall\ A, B\ f(A, S) = f(B, S) \Rightarrow A = B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cap B$

Lois de composition avec des fonctions

Loi interne : $\forall\, f, g \ \in \mathcal{F}(E,F)\ L(f,g) \in \mathcal{F}(E,F)$

$(f,g) \rightsquigarrow f/g$

$(f,g) \rightsquigarrow max(\{\ f(0), g(0)\ \})$

Loi commutative : $\forall\, f, g \ \in \mathcal{F}(E,F)\ L(f,g) = L(g,f)$

$(f,g) \rightsquigarrow f * g - (f+g)$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

Loi associative : $\forall\, f, g, h \ \in \mathcal{F}(E,F)\ L(\ L(f,g), h\ ) = L(\ f, L(g,h)\ )$

$(f,g) \rightsquigarrow min(f,g)$

$(f,g) \rightsquigarrow f' + g'$

Elément neutre e : $\exists\ e\ \forall f \ \in \mathcal{F}(E,F)\ L(f,e) = Lf(e,f) = f$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

$(f,g) \rightsquigarrow max(f,g)$

Elément symétrique u de v : $\forall u\ \exists\ v\ L(u,v) = L(v,u) = e$

$(f,g) \rightsquigarrow f + g$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

Elément idempotent i : $\exists\ i\ \exists\ p\ L^p(i) = i$

$(f,g) \rightsquigarrow max(f,g)$

$(f,g) \rightsquigarrow f + g + id$

Elément nilpotent n : $\exists\ n\ \exists\ p\ f^p(n) = e$

$(f,g) \rightsquigarrow f * g$

$(f,g) \rightsquigarrow f + g$

Elément absorbant a : $\exists\ a\ \forall\ f\ L(a,f) = L(f,a) = f$

$(f,g) \rightsquigarrow x * y$

$(f,g) \rightsquigarrow x + y$

Elément simplifiable s : $\forall\ f, g\ L(f,s) = f(g,s) \Rightarrow f = g$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

$(f,g) \rightsquigarrow max(f,g)$

$\diamondsuit$

Chapitre 2.

Polynômes et équations

L'algèbre traditionnelle se caractérise par un certain nombre de calculs et de techniques de calculs. Les opérations mises en jeu sont les quatre opérations arithmétiques classiques, augmentées éventuellement de *div* et *mod* qui sont respectivement le quotient et le reste pour la division dans $\mathbb{N}$. Les polynomes sont des "morceaux de formules" très utiles. Au début à une seule variable notée x ou X, ils se composent de sommes de puissances de X pondérées par un coefficient numérique ou symbolique. La notion de degré d'un polynôme permet d'indiquer à la fois le nombre de termes requis (éventuellement nuls) et de prévoir la difficulté à le manipuler.

Si on note $P(X)$ un polynome en X, la fonction $X \mapsto P(X)$ est la fonction polynomiale associée. On peut alors donner une valeur à X qui était auparavant appelée indéterminée. Résoudre une équation consiste à trouver la ou les valeurs de X (ou à démontrer qu'il n'en existe aucune, ou à discuter à quelle condition ces solutions existent) qui vérifient l'équation et les premiers cas particuliers sont posés par la résolution des équations pour des polynomes de degré 1 et 2. Pour le degré 3, les choses se compliquent. Au-delà, des mathématiciens ont démontré que dans le cas général il n'y a pas forcément de formule de résolution.

Nous terminerons ce chapitre par les nombres complexes qui ont de très nombreuses liaisons avec les polynomes. Ainsi les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions du polynome $X^n = 1$.

2.1 Polynomes

Un polynome P est avant tout une suite ordonnée de coefficients, notée classiquement $(a_0, a_1...a_n)$. On l'écrit plus simplement $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ pour faciliter les opérations. Le nombre n qui est l'indice du plus grand coefficient non nul est nommé le degré de P. Ainsi la suite infinie de valeurs $(1, 0, 0, 0, 0, 5, 7, 0, ...0...)$ définit le polynome $1+5X^5+7X^6$ qui est de degré 6. On a pris la mauvaise (mais pourquoi ?) habitude de noter $aX+b$ le polynome de degré 1 et $aX^2 + bX + c$ celui de degré 2.

L'addition de deux polynomes se fait terme à terme pour les coefficients correspondants à un même degré. Pour la multiplication, on effectue tous les produits par distributivité puis on réduit et on ordonne. Si les coefficients sont en général dans $\mathbb{R}$, ils peuvent être dans $\mathbb{N}$ ou même ailleurs. La lettre X n'a *a priori* aucune valeur. Ainsi, ce peut être une fonction f, une matrice M voire un ensemble E. On ne s'intéresse pour l'instant qu'aux calculs sur les puissances pondérées de X.

Exercice 2.1

Soit P et Q deux polynômes de degré respectif α et β. Que peut-on dire du degré de $P + Q$ et PQ ?

$\diamondsuit$

Exercice 2.2

On utilise la notation $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ pour abréger l'écriture $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$. Comment noterait-on $a_nX^n+a_1X+...+a_0$? $a_0X^n+a_1X^{n-1}+...+a_{n-1}X+a_n$? Y a-t-il un intérêt à écrire les puissances par ordre croissant ou par ordre décroissant ? Utiliser $\sum$ pour écrire formellement PQ et $a^n - b^n$.

$\diamondsuit$

Des identités remarquables permettent de factoriser, c'est à dire de décomposer un (gros) polynome en un produit de polynomes plus petits à savoir :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Le polynome $(a + b)^n$ s'écrit $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$ où C_n^i désigne le coefficient du binome qui correspond au nombre de sous-ensembles de cardinal i dans un ensemble de cardinal n.

Les écritures canoniques $a(X+b/a)$ et $a(X-r_1)(X-r_2)$ pour les polynomes de degré 1 et 2 permettent de factoriser aussi de nombreux polynomes car il faut savoir que tous les polynomes à coefficients dans $\mathbb{R}$ se factorisent en produits de polynomes de degré 1 ou 2.

Exercice 2.3

Comment retrouve-t-on les valeurs de r_1 et r_2, racines de l'équation du second degré ? En déduire une factorisation de X^4+1. Quel est le rapport entre a, b, c et $s=r_1+r_2$ $p=r_1r_2$?

$\diamondsuit$

2.2 Equations et Inéquations

Une équation met en jeu comme son nom l'indique le symbole =. Puisque $f(x)=a$ équivaut à $f(x)-a=0$ soit encore $g(x)=0$ pour $g(x)=f(x)-a$ on ne traitera que les équations du modèle $f(x)=0$. De même pour les inéquations, on peut se ramener aux deux modèles $f(x)>0$ et $f(x)\geq 0$.

Tout x tel que $f(x)=0$ est nommé racine de l'équation. Lorsqu'on traite des équations, on confond souvent un polynome P avec sa fonction polynomiale $X \mapsto P(X)$. Ainsi on dit que le polynome du premier degré admet la valeur $-b/a$ comme racine unique et celui du second degré admet comme racine(s) $(-b+\sqrt{\Delta})/2a$ et $(-b-\sqrt{\Delta})/2a$ si $\Delta=b^2-4ac$ est positif ou nul, ce qui donne deux racines, éventuellement confondues pour $\Delta=0$.

Si un polynome P admet ρ comme racine, alors il se factorise en $(X-\rho)Q$ et réciproquement toute racine d'un facteur de P est racine de P.

Exercice 2.4

Factoriser X^3+X^2-2X. Factoriser $X^2+X+\gamma$ sachant que $X=3$ est racine.

$\diamondsuit$

Pour résoudre une équation $f(x)=0$, on est souvent amené à faire une étude de la fonction, discuter en particulier de sa continuité puis tracer sa courbe représentative quand il n'est pas possible de trouver des racines exactes. Dans de nombreux cas (polynomiaux, sinusoidaux...) il y a plusieurs solutions et on se doit de réduire l'intervalle de recherche pour aboutir à une solution unique.

Exercice 2.5

Utiliser *gnuplot* pour tracer $x \mapsto x^4 - 7x^3 + 1$ et en trouver les racines.

Si on ne dispose pas de système de tracé, comment peut-on encadrer les racines de façon précise ?

$\diamondsuit$

2.3 Nombres complexes

Un nombre complexe est un polynome du premier degré en i avec la particularité que $i^2 = -1$. On le note classiquement $z = x + iy$. Son module ρ est le nombre positif défini par $\rho^2 = x^2 + y^2$ et son argument est l'angle θ tel que $tg(\theta) = y/x$ ce qui permet d'écrire $z = \rho(\ cos(\theta) + isin(\theta)\ )$ d'où la notation $z = \rho e^{i\theta}$. x est nommé partie réelle de z et y sa partie imaginaire.

Exercice 2.6

Donner les différentes écritures de $1 + i$, i, -1 et $3 + 5i\sqrt{2}$.

$\diamondsuit$

L'addition des nombres complexes se fait terme à terme, le produit en développant et en ordonnant après avoir simplifié i^2 en -1. L'avantage de l'écriture en $z = \rho e^{i\theta}$ et qu'elle fournit (plus rapidement) des expressions compactes et qu'elle permet de retrouver de nombreuses formules trigonométriques.

Exercice 2.7

Retrouver $cos(a + b)$ en fonction de $sin(a)$, $sin(b)$, $cos(a)$, $cos(b)$ grâce à l'identité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$.

$\diamondsuit$

Une des premières applications des nombres complexes est la résolution dans tous les cas de figure de l'équation du second degré : si $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif, on pose $T = -\Delta$ ce qui permet d'utiliser $i\sqrt{T}$ comme racine de Δ.

Exercice 2.8

Discuter le nombre et le signe des racines de l'équation $\alpha x^2 + x + \mu$ en fonction des nombres réels α et μ. Reprendre avec α et μ complexes.

$\diamondsuit$

Comme on peut le voir dans l'exercice précédent, une grande différence etre les nombres réels et les nombres complexes se situe dans l'absence d'une relation d'ordre. Il est possible de définir une relation comme

$$x + i\,y\;\mathcal{R}\;u + i\,v \Leftrightarrow (x \leq u) \quad \text{ou} \quad (x > u \quad \text{et} \quad y \leq v)$$

mais cela ne résoud pas pour autant tous les problèmes.*

La résolution générale des équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ est plus "facile" que dans $\mathbb{R}$ car $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, ce qui signifie qu'un polynome de degré n dans $\mathbb{C}$ a exactement n racines. Pour résoudre une équation monomiale du type $z^n = w$ on identifie les parties réelles et imaginaires de z^n et de w. En particulier les racines de $z^n = 1$, nommées racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 2.9

Calculer les racines de $P = x^4 + 1 = 0$ et en regroupant les racines conjuguées, retrouver la factorisation de P.

$\diamondsuit$

Le nombre complexe $x - iy$ est nommé nombre complexe conjugé du nombre $x - iy$; lorsque $x + iy = z$ on le note souvent $\overline{z}$. Le produit $z\overline{z}$ vaut $x^2 + y^2$ c'est donc le carré ρ^2 du module de z (et c'est un nombre réel). On en déduit que $1/z$ s'écrit $\overline{z}/\rho^2$.

Exercice 2.10

Tracer effectivement les racines n-ièmes de l'unité pour n de 1 à 5.

Avec cette méthode, à partir de quel n voit-on un cercle plutôt qu'un polygone régulier ?

$\diamondsuit$

* Pourquoi ?

Chapitre 3.

Etude et tracé des Fonctions

3.1 Plan d'étude d'une fonction

Le tracé d'une fonction n'est que l'étape finale de l'étude. Celle-ci commence par la détermination du domaine de définition et du domaine d'étude (en cas de symétrie, parité etc.). On vient alors préciser le comportement de la fonction aux bornes de ce domaine par des études de limites (voire de directions asymptotiques) pour ensuite étudier la contitnuité et la dérivabilité de la fonction, les points exceptionnels comme les points d'inflexion, de rebroussement... Il ne reste plus enfin qu'à fournir quelques valeurs, et peut-être quelques équations de tangente pour définir des points de tracé.

Signalons que de nombreuses calculettes ainsi que des logiciels gratuits (comme gnuplot) ou payants (comme maple, mathematica) "savent" tracer des courbes et parfois même déterminer des limites. Mais un dessin ne remplacera jamais une étude précise de la fonction, surtout pour des points "particuliers".

Pour le domaine de définition, les quelques cas d'impossibilité s'énoncent ainsi

- *un dénominateur ne doit pas s'annuler*
- *la quantité sous la racine doit être non négative*
- *on ne peut calculer que le log d'une quantité strictement positive*

Exercice 3.1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} f_1 & : & x \mapsto 1/(x^2-1) \\ f_2 & : & x \mapsto 1/\sqrt{(x^2-1)} \\ f_3 & : & x \mapsto 1/log(\ \sqrt{(x^2-1)}\ ) \end{array}$$

$\diamondsuit$

Si f est paire : $f(-x) = f(x)$ alors on peut se dispenser d'étudier f pour les valeurs négatives de x car la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des y. Si $f(x+a) = f(x)$ alors f est périodique de période a et on peut se contenter d'étudier f sur un intervalle de longueur a comme par exemple $[-a/2, a/2]$ ou $[0, a]$. Rappelons que *sin* et *cos* admettent comme plus petite période 2π, que *cos* est paire alors que *sin* est impaire.

Exercice 3.2

Donner le domaine de définition et le domaine d'étude des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} g_1 & : & x \mapsto 1/sin(\ x^2-1\ ) \\ g_2 & : & x \mapsto log(\ x^2-3x+2\ ) \end{array}$$

$\diamondsuit$

Le calcul des limites aux bornes se fait en appliquant des règles "évidentes" comme $lim(a+b) = lim(a) + lim(b)$ lorsque toutes ces limites existent. La définition exacte de " f admet b comme limite au voisinage de $x = a$" est

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ ;\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

On admettra (plutôt qu'on ne redémontrera) que certaines fonctions "l'emportent" sur d'autres. Ainsi lorque x tend vers l'infini, xe^{-x} tend vers zéro.

Lorsque $f(x)$ tend vers $f(a)^*$ quand x tend vers a, on dit que f est *continue* en a. La limite du taux d'accroissement de f en x_0, autrement dit la limite du rapport lorsque h tend vers 0 est noté $D(f, x_0)$. Lorsque la dérivabilité de f en x_0 a été prouvée (par exemple si f est la somme de fonctions dérivables partout), cette limite peut être confondue avec la limite de $f'(x)$ pour x tendant vers x_0. C'est ce qui justifie la notation dangereuse $f'(x_0)$ pour $D(f, x_0)$. Certaines limites peuvent se déduire du calcul de telles valeurs dérivées.

* ce qui impose donc que la valeur $f(a)$ est définie.

Exercice 3.3

Calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{limite en } 1 & \text{de } x \mapsto (x^3-1)/(x-1) \\ \text{limite en } +\infty & \text{de } x \mapsto x - \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

Que penser des fonctions $x \mapsto |x|/x$ et $x \mapsto sin(x)/x$ (à cause du point $x = 0$) ?

♢

Lorsque la dérivabilité est assurée, le calcul explicite de la dérivée se fait par l'application répétée de formules élémentaires comme

$$(f+g)' = f' + g',\ \ (fg)' = f'g + fg',\ \ (fog)' = f'og.g',\ \ (f^n)' = f^{n-1}f'$$

La dérivée sert à déterminer le sens de variation de la fonction : si $f' > 0$ alors f est croissante, si $f' < 0$ alors f est décroissante. La droite tangente en x_0 à la courbe représentative de f est définie par l'équation $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ et elle passe par le point $(x_0, f(x_0))$. Les droites tangentes servent à préciser le vecteur sur lequel s'appuie la courbe au voisinage du point.

Exercice 3.4

Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Quelle est la tangente en 0 de la courbe de $g : x \mapsto 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$?

♢

Pour résumer l'étude d'une fonction, il est d'usage de construire un tableau récapitulatif. On indique sur une première ligne les valeurs de x avec éventuellement les intervalles où la fonction n'est pas définie, puis sur la ligne suivante le signe de la dérivée et enfin les variations de f avec des flèches entre les valeurs aux bornes du domaine (sous réserve que la continuité ait été démontrée). Le tracé peut alors être effectué, soit à la main, soit par calculette, ordinateur, avec les problèmes usuels de tout tracé mécanique (échelle, résolution...).

Il est bon de connaitre l'allure générale de certaines courbes. En particulier, les droites $y = ax+b$, les paraboles $y = ax^2+bx+c$, les hyperboles et fonctions homographiques $y = (ax+b)/(cx+d)$ sont suffisamment "régulières" pour pouvoir être tracées sans surprise, de même que les courbes des fonctions classiques comme *log*, *exp*, *sin*, *tg*...

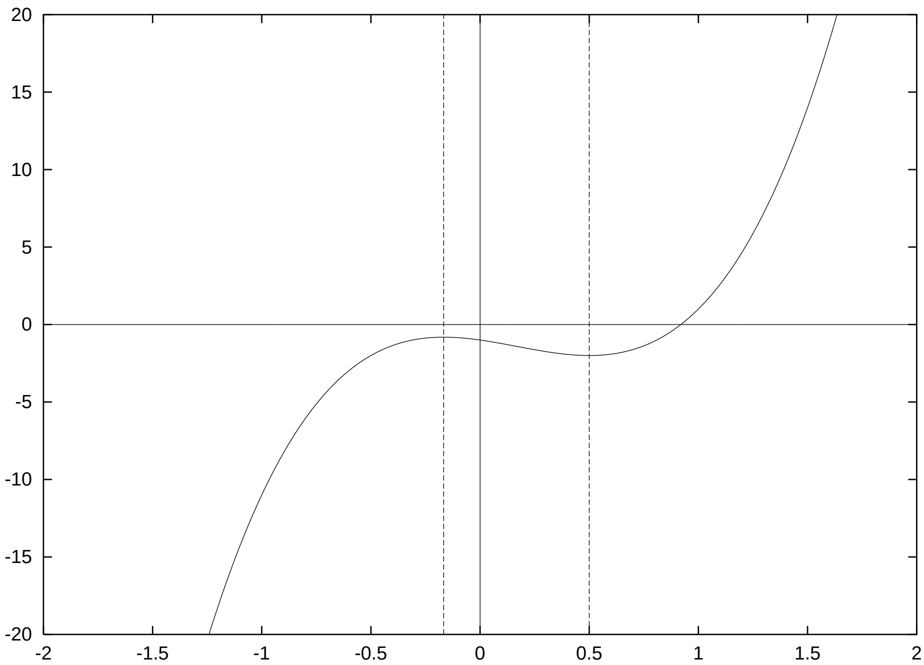
3.2 Exemples

Soit à étudier la fonction $g\ :\ x \mapsto 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$.

Grâce à $g'(x) = 2(6x+1)(2x-1)$, on construit aisément le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-1/6$		$+1/2$		$+\infty$
g'(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	
g(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$-22/7$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

D'où le tracé



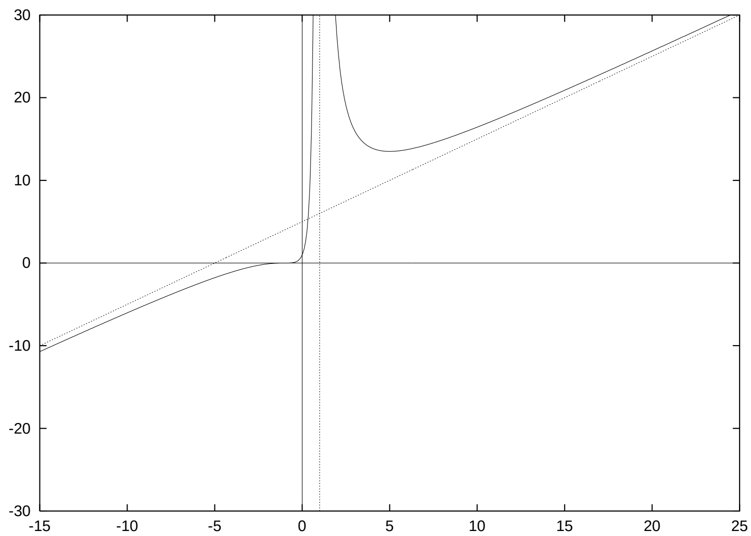
Prenons comme deuxième exemple $h\ :\ x \mapsto (x+1)^3/(x-1)^2$. Cette fonction est définie pour x différent de 1 et $h'(x) = (x+1)^2(x-5)/(x-1)^3$. Pour x inférieur à 1, le tableau de variations est

x	$-\infty$		-1		0		1
h'(x)	1	$+$	0	$+$		$+$	∞
h(x)	$-\infty$		0		1		$+\infty$

alors qu'il vaut, pour x supérieur à 1 :

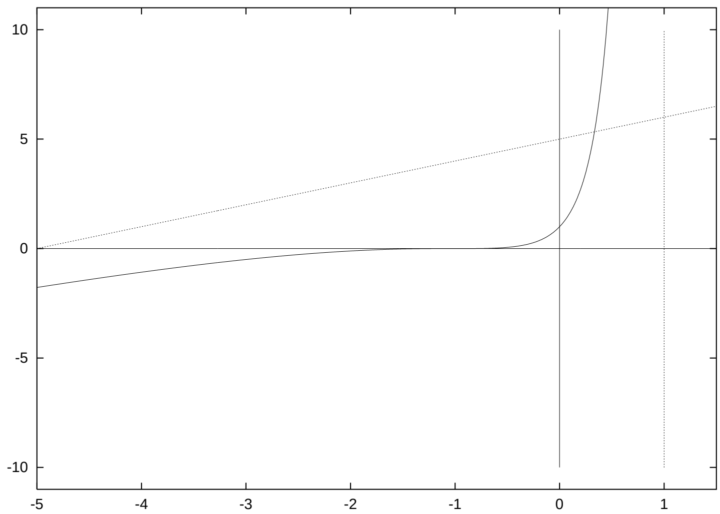
x	1		5		$+\infty$
h'(x)	∞	$-$	0	$+$	1
h(x)	$+\infty$		27/2		$+\infty$

et finalement un tracé rapide est :

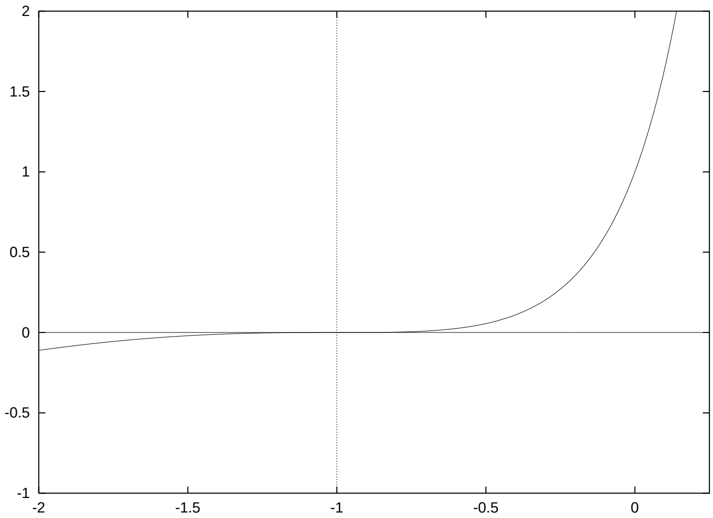


Ecrivant $x+1$ sous la forme $x-1+2$ au numérateur, $h(x)$ peut être réécrit en $(x-1)+6+12/(x-1)+8/(x-1)^2$ ce qui met en évidence $x+5$ comme asymptote. On aurait aussi pu effectuer la division du numérateur de $h(x)$ par son dénominateur, ce qui aurait abouti à $(x+1)^3 = (x+1)^2(x+5)+(12x-4)$ et via la formule $(x+1)^3/(x+1)^2 = x+5+(12x-4)/(x+1)^2$ on retrouve la même asymptote.

Pour bien apprécier ce qui se passe au voisinage de $x = 0$, deux "zooms" sont nécessaires, soient les figures :



et



3.3 Fonctions classiques

Nous ne faisons ici que rappeler les définitions et propriétés élementaires des fonctions dites classiques ou encore "usuelles". Logarithme et exponentielle sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, d'où $e^{log(x)} = x = log(e^x)$.

Le logarithme possède la propriété fonctionelle de transformer les produits en somme* :

$$log(xy) = log(x) + log(y)$$

ce qui permet de déduire que $log(x^n) = nlog(x)$ et aussi que $e^x e^y = e^{x+y}$. Cela permet de calculer informatiquement x^n par $e^{nlog(x)}$ pour la plupart des langages de programmation. log et exp sont des fonctions bijectives croissantes, continues et dérivables. On peut aussi définir le logarithme comme la fonction dont la dérivée est la fonction $x \mapsto 1/x$, soit : $f = log \Rightarrow \; f' = 1/Id$ ou encore $log(x) = \displaystyle\int_{t=1}^{t=x} dt/t$.

Exercice 3.5

Etudiez les fonctions $x \mapsto x^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$.

$\diamondsuit$

Puisque $cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ et $sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, cos et sin sont continues, dérivables et périodiques. L'équation $sin(x) = sin(a)$ admet les deux solutions $x = a$ et $x = \pi - a$ alors que l'équation $cos(x) = cos(a)$ admet les deux solutions $x = a$ et $x = -a$. La dérivée de l'exponentielle e^u est $u'e^u$, celle de $log(v) = v'/v$ d'où $sin' = cos$ et $cos' = -sin$.

Exercice 3.6

Etudiez la fonction $x \mapsto e^{-x}sin(x)$.

$\diamondsuit$

On définit de même $ch(x) = (e^x + e^x)/2$ et $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ et $th = sh/ch$ là où c'est possible. Les fonctions $Arccos$, $Arcsin$, $Arctg$, $Argch$, $Argsh$ et $Argth$ sont alors respectivement les fonctions réciproques des fonctions cos, sin, tg, ch, sh et th.

* sous réserve bien entendu que les deux quantités x et y soient strictement positives.

Exercice 3.7

Quel est la liaison entre sin^2 et cos^2 ? Trouver une formule analogue pour ch^2 et sh^2.

Quelle est la dérivée de th en fonction de ch ?

Quelle est la dérivée de $Arcsin$?

Montrez que $Argch$ et $Argsh$ s'écrivent sous la forme $log(\ x + \sqrt{T(x)}\ )$ où T est un polynôme en x.

Montrez que $Argth$ s'écrit sous la forme $log(\ S(x))/2$ où S est le rapport de deux polynômes en x.

♢

Dans de nombreux langages de programmation, on ne donne pas toutes les fonctions citées mais seulement un certain nombre, dites "primitives". Les autres doivent alors être recalculées, comme $tg(x) = sin(x)/cos(x)$ si $cos(x)$ est non nul, $ArcSin(x) = ArcTg(x/\sqrt{1-x^2})$...

Chapitre 4.

Dérivées et intégrales

4.1 Dérivées

Nous avons présenté au chapitre précédent la notion de dérivée. Rappelons qu'au départ on calcule des valeurs dérivées $D(f, x_0)$ comme des limites de taux d'accroissement de f en x_0 pour ensuite parler de la fonction f' qui à x fait correspondre $D(f, x)$ qu'on s'autorise alors à écrire $f'(x)$. On peut bien sûr calculer la dérivée de la dérivée, notée f'' puis f''' etc. Une notation plus pratique consiste à utiliser des parenthèses : $f'' = f^{(2)}$ avec la convention $f^{(0)} = f$. Il est assez facile de calculer la dérivée n-ième de nombreuses fonctions, ce qui permet de calculer un développement limité (dl) d'une fonction f au voisinage de x_0 c'est à dire de donner un polynome P qui approche f.

Exercice 4.1

Donner les dérivées successives de sin en $x = 0$; en déduire les premiers termes du dl de sin. Même question pour log et pour un polynôme quelconque de degré d.

$\diamondsuit$

Un autre intérêt des dérivées premières est qu'elle correspondent à la vitesse d'un phénomène lorque la fonction correspond au mouvement. La dérivée seconde correspond alors à l'accélération.

L'opération de dérivation $D : f \to f'$ est additive ($D(f+g) = D(f)+D(g)$) et "homogène" ($D(\alpha f) = \alpha D(f)$). L'ensemble de ces deux propriétés se résume par le mot "linéaire".

Exercice 4.2

Montrer que D n'est pas multiplicative, c'est à dire que $D(fg) \neq D(f)D(g)$.

$\diamondsuit$

4.2 Intégrales

Une vision simpliste de l'intégration consiste à la voir comme l'opération réciproque de la dérivation : $f' = g \Rightarrow f = \int g$. Toutefois il y a une différence fondamentale : une fonction ne possède (au plus) qu'une dérivée alors qu'il y a de nombreuses intégrales (ou "primitives") d'une fonction, différant entre elles d'une constante : $f_1 = f_2 = \int g \Rightarrow \forall x\ f_1(x) = f_2(x) + K$. Le calcul des primitives se fait en lisant le tableau des dérivées à l'envers. On remarquera le "trou" dans les primitives de $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ pour $n = -1$ ce qui amène à la définition du log.

L'inversion de la formule $(fg)' = f'g + fg'$ donne la formule de l'intégration par parties * :

$$\int fg' = fg - \int f'g \text{ notée aussi } \int udv = uv - \int vdu$$

alors que celle de $(fog)' = f'og.g'$ donne l'intégration par changement de variable. Ainsi l'intégrale $\int sin(2x)dx$ devient, avec le changement de variable $u = 2x$ soit $du = 2dx$ l'expression $(1/2)\int sin(u)du$ soit $-cos(2x)/2$.

Si calculer les dérivées est chose simple, le calcul des intégrales demande parfois de l'habileté (quel changement de variable effectuer ?), de la réflexion soutenue (il faut parfois plusieurs intégrations par parties pour arriver à la primitive) ou beaucoup de rigueur, notamment pour les intégrales de fration rationnelle. On s'en rendra compte avec les exercices suivants.

Exercice 4.3

Trouver une primitive de $1/(1+x^2)^2$ et de $1/(16x^2 - 32x + 25)$.

Trouver une primitive de $1/cos$ puis de $sin^3(2x)$.

$\diamondsuit$

---

* on passe ici sous silence la notion d'élément différentiable, en admettant "magiquement" que $df = f'(x)dx$ et donc sans chercher à comprendre pourquoi $\int \frac{1}{dx}$ n'a aucun sens.

Exercice 4.4

Donner un primitive de $1/(x^4+1)$ sachant qu'elle est combinaison linéaire des primitives des $1/(x-\rho_i)$ où les ρ_i sont les racines du polynôme (x^4+1).

$\diamondsuit$

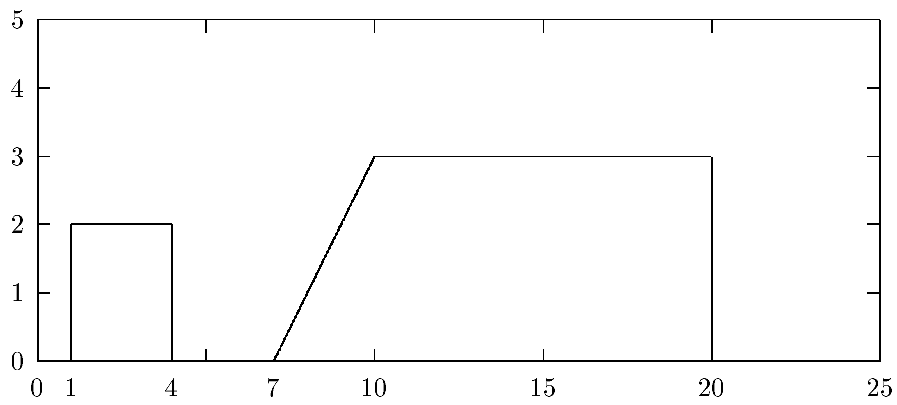
Contrairement aux dérivées, une fonction n'admet pas forcément de primitive "simple". Ainsi (mais il n'est pas aisé de le démontrer), $1/log$ n'admet pas de primitive "simple". Pire, certaines fonctions ne sont pas intégrables comme la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=1$ si x est rationnel et $g(x)=0$ si x est irrationnel.

Une application des intégrales consiste à calculer des aires, c'est à dire des surfaces. On appelle intégrale définie de f entre a et b la différence $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f, ce qui se note $\int_a^b f$ ou encore, pour tout détailler $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$.

Une intégrale définie est donc un nombre qui peut s'interpréter comme la surface entre la courbe de f, l'axe des x, la droite $x=a$ et la droite $x=b$.

Exercice 4.5

Calculer la surface du rectangle et du trapèze rectangle ci-dessous.



$\diamondsuit$

Exercice 4.6

Calculer par récurrence en justifiant les passages à la limite à l'aide d'une intégration par parties

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \text{ et } J_n = \int_0^\infty dx/(1+x^2)^n$$

$\diamondsuit$

4.3 Equations différentielles

Une équations différentielle (ED) met en jeu une variable, une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées. Résoudre une équation différentielle c'est trouver non seulement des fonctions mais aussi des intervalles sur lesquelle la fonction est dérivable et vérifie l'équation. Un problème de *Cauchy* est une équation différentielle avec une "condition initiale" donnée sous la forme $f(x_0) = y_0$. Pour simplifier les notations, on pose souvent $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ on parle alors de l'équation $y' = F(x, y)$ ou $f' = F(x, f)$ même si ces notations sont parfois dangereuses.

Soit à résoudre l'équation $xf'(x) = 1$. Supposant que x est non nul, on en déduit $f'(x) = 1/x$ ce qui permet de conclure à la solution $f(x) = log(|x|)+K$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ où K est une constante arbitraire. Comme log est infini pour x tendant vers zéro, il n'y a aucune solution sur $\mathbb{R}$. Le problème de *Cauchy* pour la même équation avec $f(1) = 0$ redonne le log classique. Pour $f(10) = 1$ on aurait trouvé le logarithme en base 10.

Exercice 4.7

Résoudre $f'(x) = f(x)^2$ et $f'(x) = (x + y)^2$, $y' + y = x^2$.

Résoudre $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Chercher une solution de $xy'' + y' + 4x^2y = 0$ sous forme d'une série entière $y = y(x) = \sum a_k x^k$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

$\diamondsuit$

Un cas particulier d'ED est celui des équation linéaires qu'on écrit abusivement $y' = ay + b$ et $y'' = ay' + by + c$ où a, b et c sont des fonctions avec comme principal sous-cas important celui des équation linéaires à coefficients constants où a, b et c sont alors des nombres. La solution de telles équations est constituée de la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.

Pour les autres équations différentielles, soit il s'agit d'une équation d'un type classique (*Bernouilli*, *Ricati*, *Clairaut*, *Lagrange*, "homogènes", "à variables séparables", "incomplètes",) soit ce sont des équations qu'on peut "bricoler" (changement de variable, de fonction, utilisation de développements en série) soit on ne peut rien y faire !

Chapitre 5.

Suites et Séries

5.1 Suites

Si *a priori* une suite est une fonction dont le domaine de définition est une partie de $\mathbb{N}$ ce qui justifierait de la noter u ou $n \mapsto u(n)$, la topologie de $\mathbb{N}$ fait qu'on la note (u_n) et qu'on la traite différemment d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$. En particulier la seule limite à étudier est en $+\infty$, il n'y a pas à se poser de question de continuité, de dérivabilité.

Le seule notion qui reste est celle de convergence, voire de vitesse de convergence. Les suites classiques sont les suites arithmétiques, vérifiant la relation $u_{n+1} = a + u_n$ et les suites géométriques qui vérifient $u_{n+1} = bu_n$. La forme close (ou "compacte") est son expression directe en fonction de n et de quelques valeurs initiales, ce qui permet de la calculer (informatiquement) en temps constant. Ces notions sont très utiles pour les calculs de complexité.

Exercice 5.1

Etudier la convergence des suites arithmétiques, des suites géométriques et des séries associées.

$\diamondsuit$

Exercice 5.2

Trouver la forme compacte de la suite arithmético-géométrique définie par $u_n = au_{n-1} + b$.

$\diamondsuit$

Même avec des suites non convergentes, on peut s'intéresser à la vitesse de croissance. On les compare alors aux suites $u(n) = n!$, $u(n) = a^n$, voire aux suites $u(n) = f(n)^p$ ou $u(n) = a^{g(n)}$.

Les équations aux différences, les relations de récurences entre suites sont alors l'analogue des équations différentielles et requièrent alors les mêmes techniques de résolution.

Exercice 5.3

Résoudre $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ nommée suite de $Fibonacci$ sachant que la solution est $a\rho_1^n + b\rho_2^n$ où ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation caractéristique associée : $X^2 = X + 1$. On prendra $u_0 = u_1 = 1$.

Quel est l'ordre de grandeur de u_n ?

$\diamondsuit$

Exercice 5.4

Dans le pire des cas pour la méthode de tri nommée $QuickSort$, le nombre L_n de comparaisons dans le mode de découpage ("split") vérifie la relation $L_n = L_{n-1} + n - 1$. Quel est sa forme compacte sachant $L_0 = 0$?

$\diamondsuit$

Certaines suites n'ont pas de limite, (comme $n \to (-1)^n$) mais admettent des sous-suites convergentes vers des limites nommées valeurs d'adhérence (ici vers 1 et -1). D'autres admettent des limites qu'on ne peut pas forcément calculer comme $u_n = sin(u_{n-1})$.

Lorsqu'une suite s'écrit $u(n) = f(\ u(n-1)\ )$ avec f continue, la limite L de u (si elle existe) vérifie $L = f(L)$ ce qui permet par exemple de montrer que la suite $u_{n+1} = (u_n + a/u_n)/2$ converge vers $\sqrt{a}$ pour $u_1^2 > a$.

La théorie générale pour résoudre $x_n = a_n x_{n-1} + b_n$ dans le cas général consiste à définir y_n par $y_0 = x_0$ et $x_n = y_n p_n$ où p_k désigne le produit $a_1 a_2 ... a_k$ car alors on a seulement à résoudre $y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j$ si $c_j = b_j/p_j$. Cette méthode simplifie de nombreux calculs lorsque a_n est une fraction en n. Il est alors courant de "tomber" sur la *série harmonique* H_n définie par $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$ dont l'ordre de grandeur est $log(n)$.

Exercice 5.5

Dans la méthode de tri nommée *QuickSort*, le nombre moyen F_n de comparaisons vérifie la relation $F_n = n - 1 + (\sum F_{i-1} + \sum F_{n-i})/n$ où à chaque fois les sommes sont prises pour i de 1 à n. Quel est son ordre de grandeur ?

$\diamondsuit$

Une suite z_n de nombres complexes tend vers z si la suite (réelle) des modules $|z_n - z|$ converge vers 0.

Lorsqu'on doit traiter une inégalité au lieu d'une égalité, seuls certains cas sont "traitables" à l'aide du "théorème fondamental" : pour une inégalité du type $x_n \leq b_0 x_n + ... + b_p x_{n-p} + g(n)$ (avec $n \geq p$), on peut affirmer que x_n est inférieur à $K_2(c+\epsilon)^n$ si c est la racine réelle positive de $x^{p+1} = b_0 x^p + ... + b_p$ et si $g(n) < K_1 c^n$ à condition que les b_i soient positifs ou nuls, avec au moins un b_i supérieur à 1.

Exercice 5.6

En théorie des graphes, un ensemble indépendant est un ensemble de sommets dont aucune paire n'est reliée par une arête. Dans le pire des cas, le nombre de calculs pour trouver la taille du plus grand ensemble indépendant d'un graphe de n sommets est le nombre f_n qui vérifie $f_n \leq cn^2 + f_{n-1} + f_{n-2}$. Quel est l'ordre de grandeur de f_n ?

Avec une optimisation classique, on aboutit aisément à la nouvelle inéquation $f_n \leq cn^2 + f_{n-1} + f_{n-3}$. Quel est le nouvel ordre de grandeur de f_n ?

$\diamondsuit$

Exercice 5.7

Combien faut-il de multiplications pour multiplier deux matrices de taille n ?

La méthode rapide de multiplications des matrices, dite méthode de *Strassen*, n'utilise que g_m multiplications avec $g_m = 7g_{m-1} + 18.4^{m-1}$. Y gagne-t-on vraiment quelque chose si $n = 2^m$?

$\diamondsuit$

Si f_n est une suite de fonctions, on peut étudier la limite ponctuelle en x des $f_n(x)$ et en déduire dans les bons cas une fonction f qui est donc la limite des f_n. Il est à noter qu'il faut des convergences fortes (normale, uniforme) pour que les propriétés des fonctions f_n comme la continuité, la dérivabilité... "passent" à la limite f.

5.2 Séries

Une série de terme général u_n est une suite dont les valeurs sont les sommes partielles de la suite (u_n). Autrement dit, la série de terme u_n est la suite (v_n) telle que $v_n = v_{n-1} + u_n$ soit encore $v_n = u_0 + u_1 + ...u_n$. On note $\sum u_n$ une telle série. Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il faut au moins que la suite u_n converge mais ce n'est pas suffisant, comme le montre l'exemple classique $u_n = 1/(n+1)$.

Exercice 5.8

Montrer qu'effectivement la série de terme général $1/n$ ne converge pas.

Vers quoi converge la série $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$?

$\diamondsuit$

La série de fonctions $\sum f_n$ est la fonction $x \mapsto \sum f_n(x)$ là où il y a convergence.

5.3 Développements en séries

Un cas très important de séries de fonctions est celui des séries entières $\sum a_n x^n$ et celui des séries trigonométriques $\sum c_n e^{inx}$. En particulier le développement en série entière d'une fonction se fait à l'aide des dérivées n-ièmes : au voisinage de 0, le développement correspond à $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

La convergence de la suite $S(f)(x) = \sum f^{(n)}(0)x^n/n!$ vers $f(x)$ n'est pas garantie, même pour les fonctions indéfiniment dérivables, comme le montre l'exemple de la fonction $x \to e^{-1/x^2}$.

Exercice 5.9

Donner le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ (on prolongera f par continuité en x =0). Vers quoi converge la série de f ?

Retrouver le développement classique de *exp*, *log*, *sin*...

$\diamondsuit$

Si f est une fonction définie sur l'intervalle $[-L,+L]$ et étendue par périodicité à R (on dit alors que f est $2L$- *périodique*), la série de $Fourier$ de f en x est donnée par

$$\frac{a_0}{2}+\sum_n(a_n.cos(\frac{n\pi x}{L})+b_n.sin(\frac{n\pi x}{L})\ )$$

où les coefficients a_n et b_n sont définis respectivement par

$$a_n=(1/L)\int_c^{c+2L}\ f(x).cos(\frac{n\pi x}{L}).dx$$

et

$$b_n=(1/L)\int_c^{c+2L}\ f(x).sin(\frac{n\pi x}{L}).dx$$

pour une constante c quelconque (en pratique on prend $c=0$ ou $c=-L$).

Exercice 5.10

Donner la série de $Fourier$ de f où $f(x)=sin(x)$.

Donner la transformée de $Fourier$ de la fonction g, 2π-périodique définie par $g(x)=x^2$ pour $x\in[0,2\pi]$. En déduire $\sum\frac{1}{n^2}$.

Donner la transformée de $Fourier$ de la fonction h, 4π-périodique si $h(x)=x$ pour $x\in[0,2]$.

$\diamondsuit$

L'identité de $Parseval$ est la relation

$$\int_{-L}^{+L}\ f(x)^2\ =L.(\ \frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2)\ )$$

Elle permet de trouver de nombreuses sommes de séries.

Exercice 5.11

Appliquer l'identité de $Parseval$ à la fonction de l'exercice à l'une des fonctions de l'exercice précédent pour en déduire $\sum\frac{1}{n^4}$.

$\diamondsuit$

Chapitre 6.

Solution des exercices

Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1

Un ensemble contient des éléments distincts possiblement ordonnés. Donc $\{x, x\}$ et $\{x\}$ désignent le même ensemble. De même : $\{x, y\} = \{y, x\}$. Mais combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble $\{x, y\}$?

Solution :

Si x est différent de y (ce qu'on pourrait croire avec une telle écriture), il y a deux éléments dans $\{x, y\}$ Sinon, il n'y en a qu'un.

$\diamondsuit$

Exercice 1.2

Combien y a-t-il de voyelles ?

Solution :

Cela dépend de la langue, bien sûr, mais aussi du codage. Ainsi en français il y a les voyelles a,e,i,o,u,y soit 6 voyelles mais si on compte les lettres accentuées comme éê... il y en a plus. Comme quoi tout est une question de définition, voire de point de vue.

$\diamondsuit$

Exercice 1.3

Soit D l'ensemble des nombres entiers de 0 à 10, D^* l'ensemble des nombres entiers de 1 à 10, D^{**} l'ensemble des nombres entiers strictement positifs entre -1 à 10, D_P l'ensemble des nombres pairs dans D, D_I l'ensemble des nombres impairs dans D, D_P^* l'ensemble des nombres pairs dans D^*. Donner toutes les relations possibles entre ces ensembles pour l'inclusion $\subseteq$. Comment faire pour n'en oublier aucune ?

Solution :

Commençons par donner explicitement ces ensembles.

$$\begin{array}{lclcl} D_I & = & \{ 1,3,5,7,9 \} & & \\ D_P^* & = & \{ 2,4,6,8,10 \} & & \\ D_P & = & \{ 0,2,4,6,8,10 \} & = & D_P^* \cup \{O\} \\ D^* & = & \{ 1,2...10 \} & = & D_I \cup D_P^* \\ D & = & \{ 0,1...10 \} & = & D^* \cup \{O\} \end{array}$$

Pour être sûr de ne pas oublier de relation, le mieux est de construire un tableau (dit produit cartésien). Il faut éventuellement faire attention à l'ordre des éléments dans ce tableau pour que ce soit facile à lire.

On peut se dispenser de D^{**} car $D^{**} = D^*$ bien que leur définition "humaine" ne soit pas la même. Nous livrons ce tableau tel quel où `X` indique qu'il y a inclusion :

$\subseteq$	D_I	D_P^*	D_P	D^*	D
D_I	X			X	X
D_P^*		X	X	X	X
D_P			X		X
D^*				X	X
D					X

$\diamondsuit$

Exercice 1.4

Pour $E = \{ a, b, c \}$ donner $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Solution :

E a 3 éléments, donc $\mathcal{P}(E)$ a 2^3 soit 8 éléments, à savoir $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ et $\{a, b, c\}$.

$\mathcal{P}(\ \mathcal{P}(E)\ )$ a 2^8 soit 256 éléments, et nous ne voulons donc pas tous les lister. Donnons seulement les plus petits éléments : $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\ \{a\}\ \}$, $\{\ \{b\}\ \}$, $\{\ \{c\}\ \}$, $\{\ \{a\}, \{b,c\}\ \}$...

$\diamondsuit$

Exercice 1.5

Montrer que toute union d'ensembles peut être rendue disjointe.

Solution :

Montrons que $A \cup B$ peut être rendue disjointe. On pourra ensuite appliquer cette décomposition à $A \cup B \cup C \cup D$.... Paraphrasant "*les éléments dans A ou B sont dans A ou exactement dans B sans être dans A*" nous pouvons écrire $A \cup B = A \sqcup (B \backslash A)$. La décomposition la plus fine et symétrique serait $(A \cap B) \sqcup (A \backslash A \cap B) \sqcup (B \backslash B \cap A)$.

$\diamondsuit$

Exercice 1.6

Compléter le tableau suivant où A, B, C et E sont des ensembles avec $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E$*, et où X désigne soit A, soit B, soit C :

$\emptyset \cap E \quad =$	
$\emptyset \cup E \quad =$	
$A \ \cup\ E \quad =$	
$X \ \cap\ E \quad =$	
$(X \cap B) \ \cup\ C \quad =$	

Solution :

Voici le tableau complété. On pourrait simplifier $X \cap B$ en B lorsque $X = B$.

* ce qui ne signifie aucunement que les seuls sous-ensembles de E sont A, B et C.

$$\begin{array}{lcl}
\emptyset \cap E & = & \emptyset \\
\emptyset \cup E & = & E \\
A \cup E & = & E \\
X \cap E & = & X \\
(X \cap B) \cup C & = & (X \cap C) \cup (B \cap C) \\
\complement_E (A \cap B) & = & \complement_E (A) \cup \complement_E (B)
\end{array}$$

$\diamondsuit$

Exercice 1.7

Soit E l'ensemble des entiers de 1 à 10 et X_i l'ensemble $\{ i, i+1, i+2 \}$. La famille $\{ X_1, X_3, X_6, X_8 \}$ est-elle un recouvrement de E ? une partition de E ? Trouver toutes les familles $\{ X_j \}$ qui sont une partition de E.

Solution :

Détaillons les ensembles utilisés

$$\begin{array}{lcl}
X_1 & = & \{ 1,2,3 \} \\
X_3 & = & \{ 3,4,5 \} \\
X_6 & = & \{ 5,6,7 \} \\
X_8 & = & \{ 8,9,10 \}
\end{array}$$

De façon "évidente", tous les éléments de E sont dans un X_i donc les X_i forment un recouvrement de E. Ce n'est pas une partition car par exemple X_1 et X_3 n'ont pas une intersection nulle. Aucune famille de X_i ne peut être une partition car il faut inclure X_1 à cause de l'élément 1, il faut inclure X_3 à cause de l'élément 4, et ces ensembles ont l'élément 3 en commun. Par contre, on peut construire la partition en 3 sous-ensembles

$$\{ X_1,\ (X_3 \cup X_6) \backslash (X_1 \cup X_8),\ X_8 \}$$

$\diamondsuit$

Exercice 1.8

La famille suivante constitue-t-elle une hiérarchie ? Si ce n'est pas le cas, essayer d'utiliser un maximum d'ensembles de cette famille pour former une hiérarchie.

$$\mathcal{F} \;=\; \{\,\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Solution :

Ce n'est pas une hiérarchie car $\{a,b\} \cap \{a,c\}$ n'est ni $\emptyset$, ni $\{a,b\}$ ni $\{a,c\}$. Pour obtenir une hiérarchie, il suffit d'enlever $\{a,c\}$.

$\diamondsuit$

Exercice 1.9

Soient c une variable qui correspond au mot "clé", b une variable qui correspond au mot "bureau" et f la fonction "ouvre" qui s'interprète comme suit : $f(c,b)$ signifie "la clé c ouvre le bureau b". Traduire en langage naturel la formule

$$\exists\, c\; \forall\, b\;\; f(c,b)$$

Donner sa négation en formule et en langage naturel. Donner aussi l'interprétation des formules

$$\forall\, b\; \exists\, c\;\; f(c,b)$$

$$\exists\, b\; \forall\, c\; \neg f(c,b)$$

Solution :

L'énoncé $\exists\, c\; \forall\, b\;\; f(c,b)$ signifie qu'il y a une clé qui ouvre tous les bureaux, c'est à dire "il existe un passe-partout des bureaux". Sa négation est bien sûr "il n'existe pas de passe-partout", soit encore "quelque soit la clé, il y a (au moins) un bureau qui ne peut pas être ouvert par cette clé", d'où l'énoncé $\forall\, c\; \exists\, b\; \neg f(c,b)$.

La formule $\forall\, b\; \exists\, c\;\; f(c,b)$ signifie que "pour tout bureau, on a au moins une clé qui l'ouvre" et $\exists\, b\; \forall\, c\; \neg f(c,b)$ peut se lire "il y a au moins un bureau qui ne peut pas être ouvert par toutes les clés".

$\diamondsuit$

Exercice 1.10

Quels sont les éléments de E x $\mathcal{P}(E)$?

Solution :

Ce sont des couples formés en partie gauche d'un élément de E et en partie droite d'un sous-ensemble de E. Par exemple, si a, b, c sont dans E ce pourrait être $(a, \{a\})$, $(a, \{b, c\})$...

$\diamondsuit$

Exercice 1.11

Trouver trois interprétations de $f(x)$ comme résultat de l'application d'une fonction. Ecrire f comme un triplet.

Solution :

Premièrement, ce peut être le résultat en x de la fonction $f : E \ \rightarrow \ F$, $x \ \mapsto \ f(x)$. Deuxièmement, ce peut être le résultat en f de la fonction g : $\mathcal{F} \ \rightarrow \ F$, $f \ \mapsto \ f(x)$ pour x fixé. Troisièmement, ce peut être le résultat en (x, f) de la fonction $g : E$ x $\mathcal{F} \ \rightarrow \ F$, $(x, f) \ \mapsto \ f(x)$ pour x fixé. f est le triplet $f = (E, F, x \ \rightarrow \ f(x)$.

$\diamondsuit$

Exercice 1.12

Un coup de vent malencontreux (!) a perturbé les exemples et contre-exemples des définitions suivantes. Retrouvez les propriétés pour chacune des lignes proposées.

Fonction croissante : $\forall\, x, y \in E \ ; \ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$x \mapsto ax + b$

$x \mapsto 1/x$

Fonction minorée : $\exists\, p\, \forall\, x \in E \ : \ p \leq f(x)$

$x \mapsto x$

$x \mapsto x^2$

Fonction injective : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$x \mapsto x + 1$

$x \mapsto x^4$

Fonction surjective : $\forall x \in F \; \exists x \in E \; ; \; y = f(x)$

$x \mapsto x^2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

$x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$

Fonction bijective : $\forall x \in F \; \exists x \in E \; ; \; y = f(x)$ et x unique

$x \mapsto x^3$

$x \mapsto sin(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Fonction à point fixe : $\exists t \in E \; ; \; t = f(t)$

$x \mapsto 2x - 1/2$

$x \mapsto 1 + x$

Limite b de f en a : $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0; |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$x \mapsto log(x)$

$x \mapsto (x-1)(x+1)/(x^6-1)$ en $x = -1$

Solution :

Nous indiquons par E l'exemple et par C le contre-exemple. Il est parfois nécessaire de rajouter une valeur (minorant, point fixe etc.) et nous fournissons alors cette valeur.

Fonction croissante : $\forall x, y \in E \; ; \; x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

E : $x \mapsto ax + b$ pour $a > 0$

C : $x \mapsto 1/x$

Fonction minorée : $\exists p \; \forall x \in E \; : \; p \leq f(x)$

E : $x \mapsto x^2$ avec $p = 0$

C : $x \mapsto x$

Fonction injective : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

E : $x \mapsto x + 1$

C : $x \mapsto x^4$

Remarque : l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ devient alors une égalité.

Fonction surjective : $\forall x \in F \; \exists x \in E \; ; \; y = f(x)$

E : $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$

C : $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Fonction bijective : $\forall x \in F\ \exists x \in E\ ;\ y = f(x)$ et x unique

E : $x \mapsto x^3$

C : $x \mapsto sin(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Fonction à point fixe : $\exists t \in E\ ;\ t = f(t)$

E : $1/2$ pour $x \mapsto 2x - 1/2$

C : $x \mapsto 1 + x$

Limite b de f en a : $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0; |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

E : $log(a)$ partout (!) pour $x \mapsto log(x)$

E : $(x-1)(x+1)/(x^6 - 1)$ se simplifie en $1/(x^4 + x^2 + 1)$ et vaut donc $1/3$ en $x = -1$

♢

Exercice 1.13

Voici une liste de définitions, d'exemples et de contre-exemples. A vous de retrouver qui est qui.

Relation antisymétrique	$\forall x, y\ \in E\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
Relation irréflexive	$\forall x, y\ \in E\ x\mathcal{R}y \Rightarrow x \neq y$
Relation partielle	c'est une relation non totale
Relation réflexive	$\forall x\ \in E\ x\mathcal{R}x$
Relation symétrique	$\forall x, y\ \in E\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
Relation totale	$\forall x, y\ \in E\ x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$
Relation transitive	$\forall x, y, z\ \in E\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Relations proposées :

$E\mathcal{R}F \Leftrightarrow$ les ensembles E et F ont une intersection vide

$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \;\; f(x) \geq g(x)$

$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow$ les polynômes p et q ont une racine commune

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ x est une puissance de y

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y > 0$

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est pair

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ ou y est pair

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ et y sont pairs

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise y

Solution :*Relation réflexive :* $\forall\, x \;\in E \; x\mathcal{R}x$

Exemple : $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow$ les polynômes p et q ont une racine commune

Contre-exemple : $E\mathcal{R}F \Leftrightarrow E \cap F = \emptyset$

Relation irréflexive : $\forall\, x, y \;\in E \; x\mathcal{R}y \Rightarrow x \neq y$

Exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y > 0$

Contre-exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est pair

Relation symétrique : $\forall\, x, y \;\in E \; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

Exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ ou y est pair

Contre-exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ est une puissance de y

Relation antisymétrique : $\forall\, x, y \;\in E \; x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

Exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$

Contre-exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ et y sont pairs

Relation transitive : $\forall\, x, y, z \;\in E \; x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise y

Contre-exemple : $E\mathcal{R}F \Leftrightarrow E \cap F = \emptyset$

Relation totale : $\forall\, x, y \ \in E \ x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$

Exemple : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$

Contre-exemple : $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \ \forall x, f(x) \geq g(x)$

$\diamondsuit$

Exercice 1.14

Compléter le tableau suivant.

Relation	Réflexive	Symétrique	Transitive
$x - y$ est pair			
$x \cap y \neq \emptyset$			
$x \leq y$			
$x + 10 \geq y$			
$1 \in x \cap y$			
$x + y$ est impair			
x divise y et $x < y$			
$x = y^2$			

Solution :

Et voilà le travail (sans démonstration) !

Relation	Réflexive	Symétrique	Transitive
$x - y$ est pair	O	O	O
$x \cap y \neq \emptyset$	O	O	N
$x \leq y$	O	N	O
$x + 10 \geq y$	O	N	N
$1 \in x \cap y$	N	O	O
$x + y$ est impair	N	O	N
x divise y et $x < y$	N	N	O
$x = y^2$	N	N	N

$\diamondsuit$

Exercice 1.15

Pour chaque loi qui suit, dire s'il s'agit d'un exemple ou d'un contre-exemple.

Lois de composition avec des nombres dans $\mathbb{Z}$

Loi interne : $\forall\, x, y \ \in E \ f(x, y) \in E$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

$(x, y) \rightsquigarrow x - y$

Loi commutative : $\forall\, x, y \ \in E \ f(x, y) = f(y, x)$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y - (x + y)$

$(x, y) \rightsquigarrow x^y$

Loi associative : $\forall\, x, y, z \ \in E \ f(\ f(x, y), z\ ) = f(\ x, f(y, z)\ )$

$(x, y) \rightsquigarrow min(x, y)$

$(x, y) \rightsquigarrow (x + y)/2$

Elément neutre e : $\exists\ e \ \forall\, x \ \in E \ f(x, e) = f(e, x) = x$

$(x, y) \rightsquigarrow ppmc(x, y)$

$(x, y) \rightsquigarrow pgcd(x, y)$

Elément symétrique s de x : $\forall x\ \exists\ s\ f(x, s) = f(s, x) = e$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

$(x, y) \rightsquigarrow ppmc(x, y)$

Elément idempotent i : $\exists\ i\ \exists\ p\ f^p(i) = i$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y - 1$

Elément nilpotent n : $\exists\ n\ \exists\ p\ f^p(n) = e$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

$(x, y) \rightsquigarrow x - y + 1$

Elément absorbant a : $\exists\ a\ \forall\ x\ f(a, x) = f(x, a) = a$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y$

$(x, y) \rightsquigarrow x + y + 1$

Elément simplifiable s : $\forall\ x, y\ f(x, s) = f(y, s) \Rightarrow x = y$

$(x, y) \rightsquigarrow x * y$

$(x, y) \rightsquigarrow max(x, y)$

Lois de composition avec des ensembles

Loi interne : $\forall\, A, B\ \in \mathcal{P}(E)\ f(A, B) \in \mathcal{P}(E)$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow max(A \cap B)$

Loi commutative : $\forall\, A, B\ \in \mathcal{P}(E)\ f(A, B) = f(B, A)$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \backslash B$

Loi associative : $\forall\, A, B, C\ \in \mathcal{P}(E)\ f(\ f(A, B), C\ ) = f(\ A, f(B, C)\ )$

$(A, B) \rightsquigarrow \{\ max(A \cap B)\ \}$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

Elément neutre N : $\exists\ N\ \forall\, A\ \in \mathcal{P}(E)\ f(A, N) = f(N, A) = A$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B \backslash A \cap B$

$(A, B) \rightsquigarrow E \backslash (A \cap B)$

Elément symétrique S de A : $\forall A\ \exists\ S\ f(A, S) = f(S, A) = E$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

Elément idempotent I : $\exists\ I\ \exists\ p\ f^p(I) = I$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \Delta B$

Elément nilpotent M : $\exists\ M\ \exists\ p\ f^p(M) = N$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cap B$

Elément absorbant G : $\exists\ G\ \forall\ A\ f(G, A) = f(A, G) = G$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \backslash B$

Elément simplifiable S : $\forall\ A, B\ f(A, S) = f(B, S) \Rightarrow A = B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cup B$

$(A, B) \rightsquigarrow A \cap B$

Lois de composition avec des fonctions

Loi interne : $\forall f, g \ \in \mathcal{F}(E,F) \ L(f,g) \in \mathcal{F}(E,F)$

$(f,g) \rightsquigarrow f/g$

$(f,g) \rightsquigarrow max(\{\ f(0), g(0)\ \})$

Loi commutative : $\forall f, g \ \in \mathcal{F}(E,F) \ L(f,g) = L(g,f)$

$(f,g) \rightsquigarrow f * g - (f+g)$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

Loi associative : $\forall f, g, h \ \in \mathcal{F}(E,F) \ L(\ L(f,g), h\ ) = L(\ f, L(g,h)\ )$

$(f,g) \rightsquigarrow min(f,g)$

$(f,g) \rightsquigarrow f' + g'$

Elément neutre e : $\exists\, e\, \forall f \ \in \mathcal{F}(E,F) \ L(f,e) = Lf(e,f) = f$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

$(f,g) \rightsquigarrow max(f,g)$

Elément symétrique u de v : $\forall u\, \exists\, v \ L(u,v) = L(v,u) = e$

$(f,g) \rightsquigarrow f + g$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

Elément idempotent i : $\exists\, i\, \exists\, p \ L^p(i) = i$

$(f,g) \rightsquigarrow max(f,g)$

$(f,g) \rightsquigarrow f + g + id$

Elément nilpotent n : $\exists\, n\, \exists\, p \ f^p(n) = e$

$(f,g) \rightsquigarrow f * g$

$(f,g) \rightsquigarrow f + g$

Elément absorbant a : $\exists\, a\, \forall\, f \ L(a,f) = L(f,a) = f$

$(f,g) \rightsquigarrow x * y$

$(f,g) \rightsquigarrow x + y$

Elément simplifiable s : $\forall\, f, g \ L(f,s) = f(g,s) \Rightarrow f = g$

$(f,g) \rightsquigarrow fog$

$(f,g) \rightsquigarrow max(f,g)$

Solution :

...

$\diamondsuit$

Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1

Soit P et Q deux polynômes de degré respectif α et β. Que peut-on dire du degré de $P+Q$ et PQ ?

Solution :

Le produit $p_\alpha X^\alpha . q_\beta X^\beta = p_\alpha q_\beta X^{\alpha+\beta}$ étant non nul, si deg désigne la fonction degré, $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$. Par contre on peut pas faire mieux que $deg(P+Q) \leq deg(P)+deg(Q)$. On peut s'en convaincre en prenant $Q = -P$.

$\diamondsuit$

Exercice 2.2

On utilise la notation $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ pour abréger l'écriture $a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$. Comment noterait-on $a_n X^n + a_1 X + ... + a_0$? $a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_{n-1} X + a_n$? Y a-t-il un intérêt à écrire les puissances par ordre croissant ou par ordre décroissant ? Utiliser $\sum$ pour écrire formellement PQ et $a^n - b^n$.

Solution :

$$a_n X^n + a_1 X + a_0 \; = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} X^{n-i}.$$

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_{n-1} X + a_n \; = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}.$$

Ecrire par ordre croissant évite les surprises et permettrait d'utiliser la même lettre pour les constantes, pour le degré 1 etc. Ce n'est malheureusement pas l'habitude qui a été prise. Ecrire par ordre décroissant met en évidence le terme dominant, c'est à dire la plus grande puissance.

Si $P = \sum_{i=0}^{\alpha} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{\beta} b_i X^i$ alors $PQ = \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} c_i X^i$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, soit, de façon plus explicite $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$; $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i$

$\diamondsuit$

Exercice 2.3

Comment retrouve-t-on les valeurs de r_1 et r_2, racines de l'équation du second degré ? En déduire une factorisation de $X^4 + 1$. Quel est le rapport entre a, b, c et $s = r_1 + r_2$ $p = r_1 r_2$?

Solution :

Posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on a $r_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$ et $r_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$. Alors $s = -b/a$ et $p = c/a$.

Dans le cas général, si $P = \sum_{i=0}^{\alpha} a_i X^i$ et si les ρ_j sont les racines, alors on a $\sum \rho_j = -a_1/a_0$ et $\prod \rho_j = (-1)^n a_n/a_0$

◊

Exercice 2.4

Factoriser $X^3 + X^2 - 2X$. Factoriser $X^2 + X + \gamma$ sachant que $X = 3$ est racine.

Solution :

Pour $X = 0$, $X^3 + X^2 - 2X$ vaut 0, ce qui signifie que 0 est racine. Donc on peut écrire $X^3 + X^2 - 2X = XQ$. Posant $Q = aX^2 + bX + c$, en développant et identifiant, on trouve $Q = X^2 + X - 2$ et en factorisant Q, $X^3 + X^2 - 2X = X(X+2)(X-1)$.

Si $X = 3$ est solution de $X^2 + X + \gamma = 0$ alors $X^2 + X + \gamma = (X-3)(X-a)$. Par identification, $-3 - a = 1$ et $3a = \gamma$.

D'où, si $\gamma = -12$, $X^2 + X + \gamma = (X-3)(X+4)$; si γ est différent de -12, pas de solution.

◊

Exercice 2.5

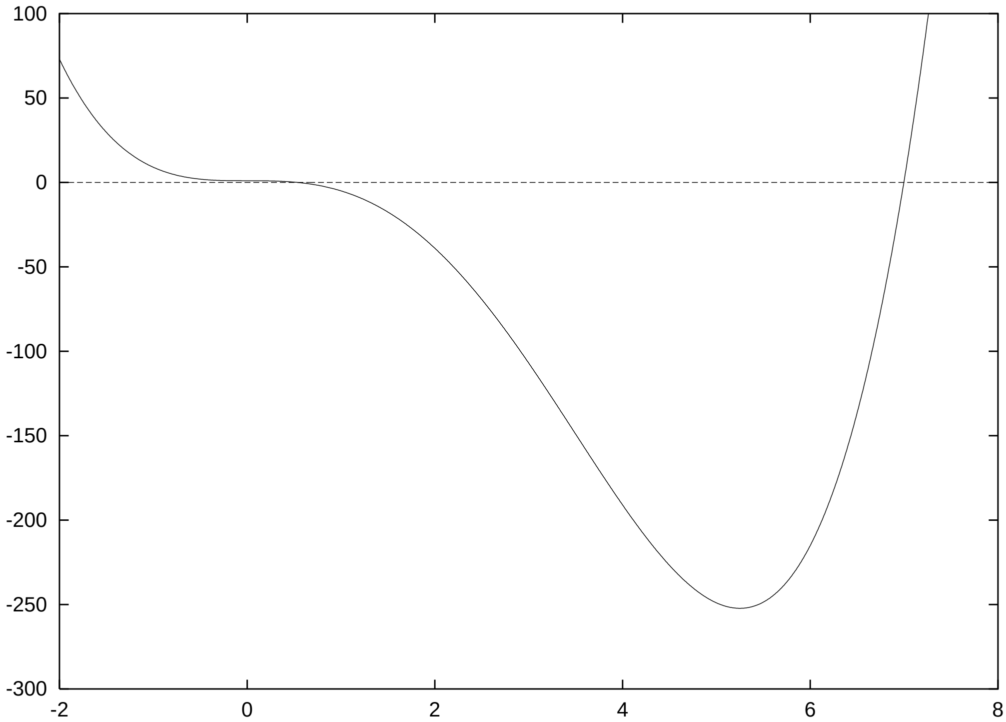
Utiliser *gnuplot* pour tracer $x \mapsto x^4 - 7x^3 + 1$ et en trouver les racines.

Si on ne dispose pas de système de tracé, comment peut-on encadrer les racines de façon précise ?

Solution :

Avec *Gnuplot*, un premier tracé entre -2 et 8 permet de voir qu'il doit y avoir une solution entre 0 et 1 et une seconde entre 6 et 8 (en fait, un peu avant 7). Voici les instructions *Gnuplot* et le le tracé correspondant

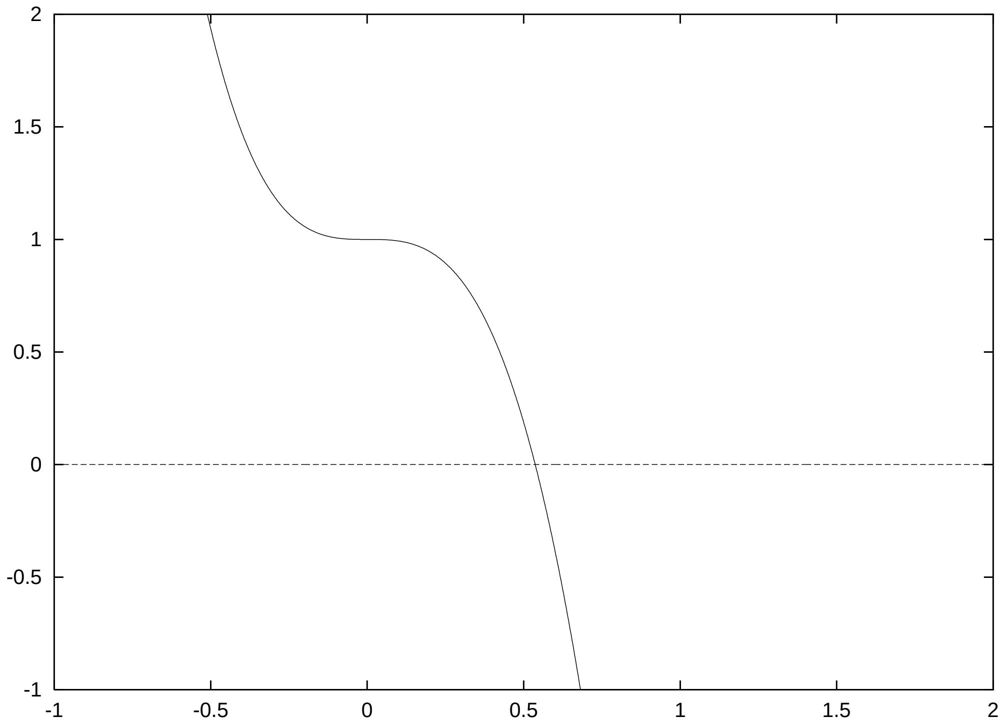
```
#Fichier exo2.5 pour Gnuplot
set xrange [ -2 : 8]
set yrange [-300 : -100]
f(x) = x**4-7*x**3+1
plot f(x)
```



Si on ne dispose pas de système de tracé, on utilise la technique de *dichotomie* : pour f continue, si $f(a)f(b) < 0$ alors il y a une valeur entre a et b qui annule f. Donc on essaie avec $m = (a+b)/2$ et on remplace ensuite soit a soit b par m et on recommence...

Ainsi f(0) =1, f(1) = -5. Puisque f(0,5) =0.1875 on cherche une solution entre 0,5 et 1. Puisque f(0,75) = -1.64, la solution doit être entre 0,5 et 0,75. On pourrait même arriver à la valeur 0.5368487 comme approximation de la première solution positive.

Avec *Gnuplot*, en restreignant via xrange [-1 :2] on voit effectivement que la solution est au voisinage de 0,5 :



$\diamondsuit$

Exercice 2.6

Donner les différentes écritures de $1+i$, i, -1 et $3+5i\sqrt{2}$.

Solution :

$$\begin{array}{ll} 1+i & = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \\ i & = e^{i\pi/2}, \\ \text{-1} & = e^{i\pi}, \\ 3+5i\sqrt{2} & = \sqrt{59}e^{i\alpha} \text{ où } tg(\alpha) = 5\sqrt{2}/3 \end{array}$$

$\diamondsuit$

Exercice 2.7

Retrouver $cos(a+b)$ en fonction de $sin(a)$, $sin(b)$, $cos(a)$, $cos(b)$ grâce à l'identité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$.

Solution :

En identifiant les parties réelles terme à terme, après développement, on trouve $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$.

$\diamondsuit$

Exercice 2.8

Discuter le nombre et le signe des racines de l'équation $\alpha x^2+x+\mu$ en fonction des nombres réels α et μ. Reprendre avec α et μ complexes.

Solution :

Si $\alpha = 0$, l'équation se réduit à $x + \mu = 0$ qui admet toujours la solution $x = -\mu$. Pour α non nul, il s'agit d'une équation du second degré. Δ vaut $1 - 4\alpha\mu$. Pour Δ négatif, les solutions sont complexes et la question de leur signe n'a aucun sens. Pour Δ positif, il y a deux solutions réelles. Leur signe peut être quelconque ; on pourra s'en convaincre en considérant les équations $(X + a)(X - (a - 1))$ pour a quelconque.

$\diamondsuit$

Exercice 2.9

Calculer les racines de $P = x^4+1 = 0$ et en regroupant les racines conjuguées, retrouver la factorisation de P.

Solution :

$x^4 = -1 = 1^4\rho^4 e^{i\pi/4}$ donc on a 4 solutions, à savoir $\rho_1 = e^{i\pi/4} = a + ib$, $\rho_2 = e^{3i\pi/4} = -a + ib$, $\rho_3 = e^{5i\pi/4} = -a - ib$, $\rho_4 = e^{7i\pi/4} = a - ib$ pour $a = cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ et $b = sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Comme ρ_1 et ρ_4 sont conjugués, $(x - \rho_1)(x - \rho_4) = x^2 - x\sqrt{2} + 1$ et donc $x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$. On aurait pu aussi essayer d'écrire x^4+1 comme le début du carré de (x^2+1), retrancher le terme en trop $(2x^2)$ et factoriser en utilisant l'identité $a^2 - b^2$.

$\diamondsuit$

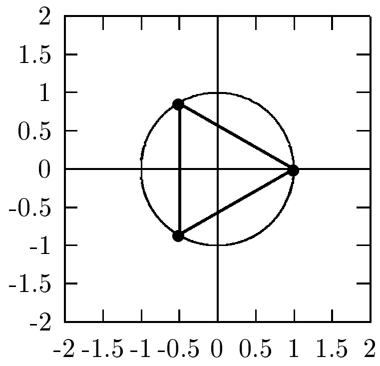
Exercice 2.10

Tracer effectivement les racines n-ièmes de l'unité pour n de 1 à 5.

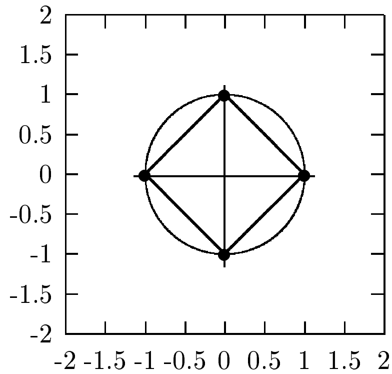
Avec cette méthode, à partir de quel n voit-on un cercle plutôt qu'un polygone régulier ?

Solution :

Les racines n-ièmes de l'unité sont situées sur le cercle-unité (le cercle de centre (0,0) et de rayon). Ces racines sont équidistantes les unes des autres et si on les relie, on obtient un polygone régulier de n inscrit dans ce cercle. Puisque $(1+0i)^n = 1$, le point $(1,0)$ est toujours solution. Si n =2, l'autre point solution est $(-1,0)$.



Avec $n=3$ on a un joli triangle équilatéral.



Et pour $n=4$ un carré.

Pour que le polygone régulier à n cotés ressemble à un cercle, il faut prendre $n \geq 20$ (après essai sur ordinateur).

$\diamondsuit$

Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} f_1 & : & x \mapsto 1/(x^2-1) \\ f_2 & : & x \mapsto 1/\sqrt{(x^2-1)} \\ f_3 & : & x \mapsto 1/log(\ \sqrt{(x^2-1)}\ ) \end{array}$$

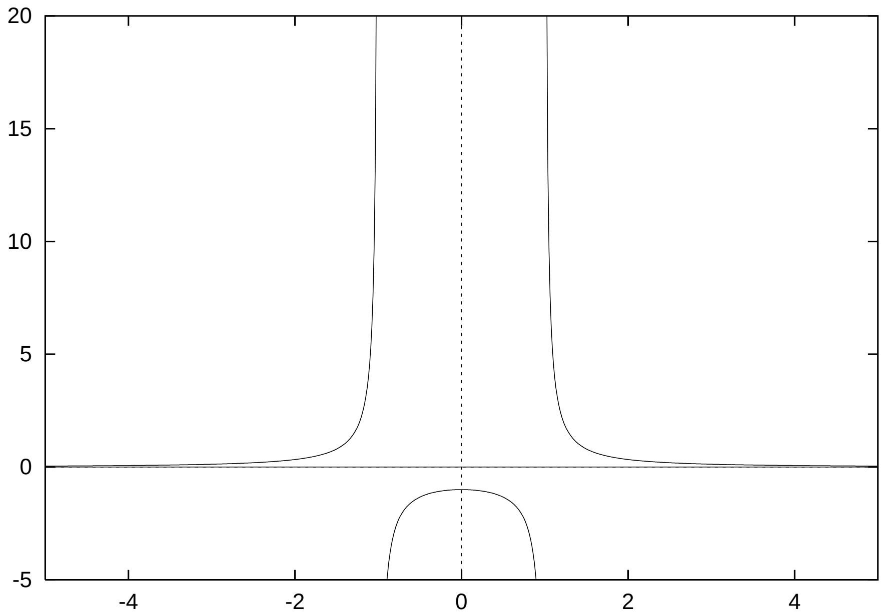
Solution :

Pour f_1 il faut $x^2 - 1$ non nul soit $x \notin \{-1, 1\}$, c'est à dire, sous forme d'intervalle, $[-\infty, -1[\cup] - 1, 1[\cup]1, +\infty[$.

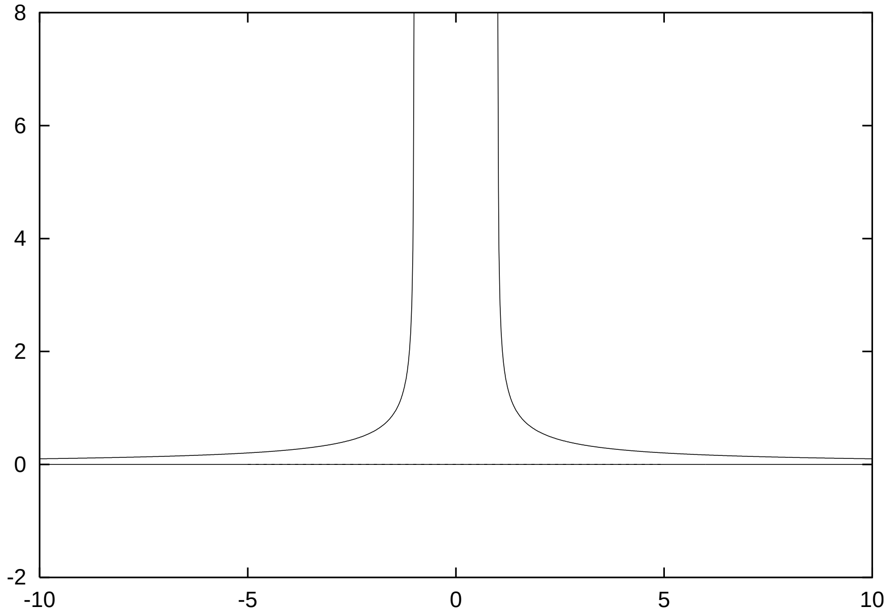
Pour f_2 il faut $x^2 - 1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2 - 1}$ non nul soit $x \notin [-1, 1]$, c'est à dire $[-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ sous forme d'intervalle.

Pour f_3 il faut $x^2 - 1 \geq 0$, $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ et $log(\sqrt{x^2 - 1})$ non nul soit $x \notin [-1, 1]$ et $\sqrt{x^2 - 1} \neq 1$, il faut donc ôter $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ au domaine de f_2.

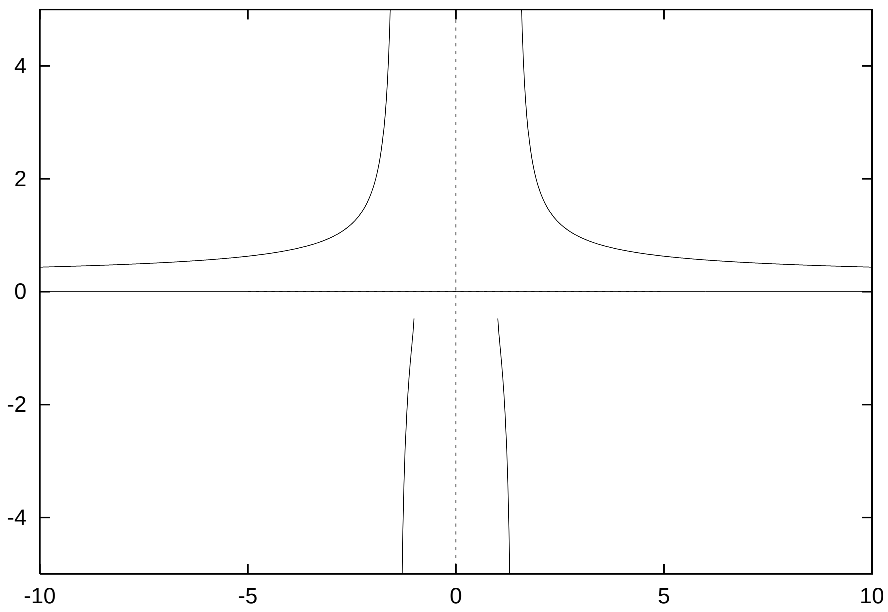
Un tracé rapide de ces courbes donne les figures suivantes



Tracé de f_1



Tracé de f_2



Tracé de f_3

$\Diamond$

Exercice 3.2

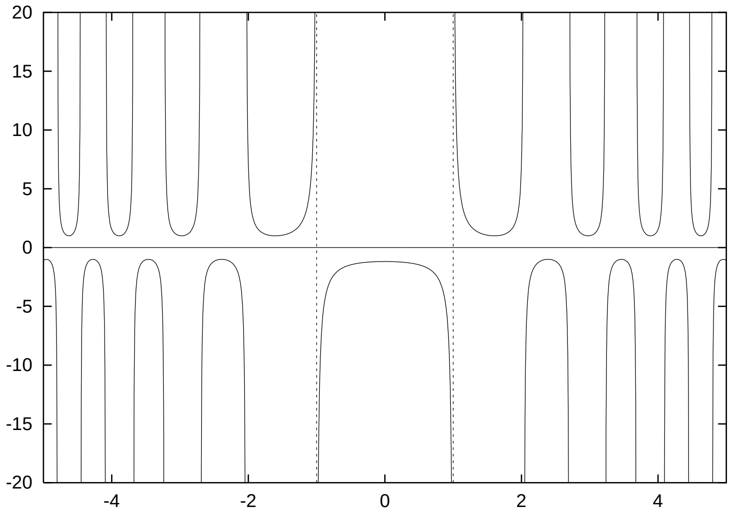
Donner le domaine de définition et le domaine d'étude des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lcl} g_1 & : & x \mapsto 1/sin(\ x^2 - 1\ ) \\ g_2 & : & x \mapsto log(\ x^2 - 3x + 2\ ) \end{array}$$

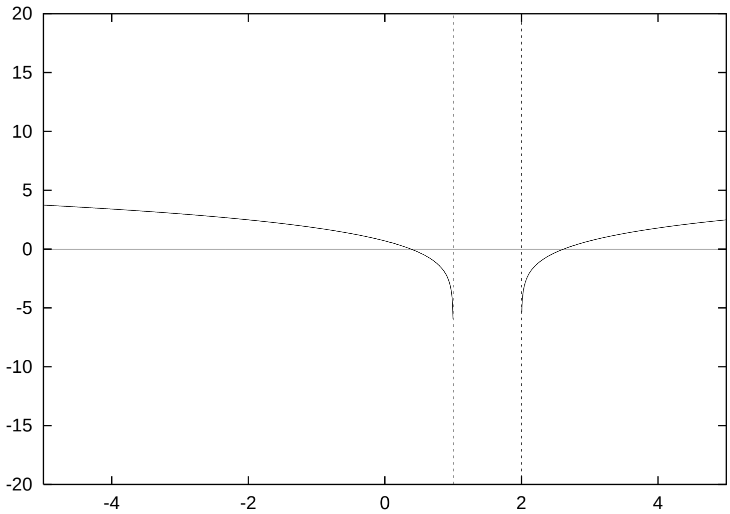
Solution :

L'étude de $u \mapsto sin(u)$ se restreint à l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour u. Ici u vaut $x^2 - 1$ donc on doit se restreindre à l'intervalle $[1, \sqrt{2\pi + 1}$ avec $x \notin \{-1, +1\}$. Un tracé rapide de ces courbes donne les figures suivantes.

Tracé de g_1



Tracé de g_2



$\diamondsuit$

Exercice 3.3

Calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{limite en } 1 & \text{de} & x \mapsto (x^3-1)/(x-1) \\ \text{limite en } +\infty & \text{de} & x \mapsto x - \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

Que penser des fonctions $x \mapsto |x|/x$ et $x \mapsto sin(x)/x$ (à cause du point $x = 0$) ?

Solution :

Si x tend vers 1, x est différent de 1 et on peut donc simplifier par $x - 1$ la première expression proposée ; il reste alors $x^2 + x + 1$ qui est une fonction continue et dont la limite en 1 est 3.

Pour $x - \sqrt{x^2+1}$, on multiplie par la $x + \sqrt{x^2+1}/x + \sqrt{x^2+1}$ ce qui ne change rien au résultat. Comme $x + \sqrt{x^2+1}$ est la quantité conjuguée de $x - \sqrt{x^2+1}$, il reste 1 au numérateur et $1/(x + \sqrt{x^2+1})$ au dénominateur dont la limite est 0 pour x infini.

Clairement $x \mapsto |x|/x$ n'est pas définie en zéro et ne peut pas être prolongée car sa limite à gauche est -1 et sa limite à droite est 1. Par contre $x \mapsto |x|$ est continue en zéro mais sa dérivée n'admet pas de limite en 0.

$x \mapsto sin(x)/x$ n'est pas définie en zéro mais on peut la prolonger par la valeur 1 en zéro car la limite de $sin(x)/x$ en zéro est la valeur de cos en 0 (écrire $sin(x)$ comme $sin(x) - sin(0)$ et x comme $x - 0$ pour faire apparaître la définition de la dérivée).

♢

Exercice 3.4

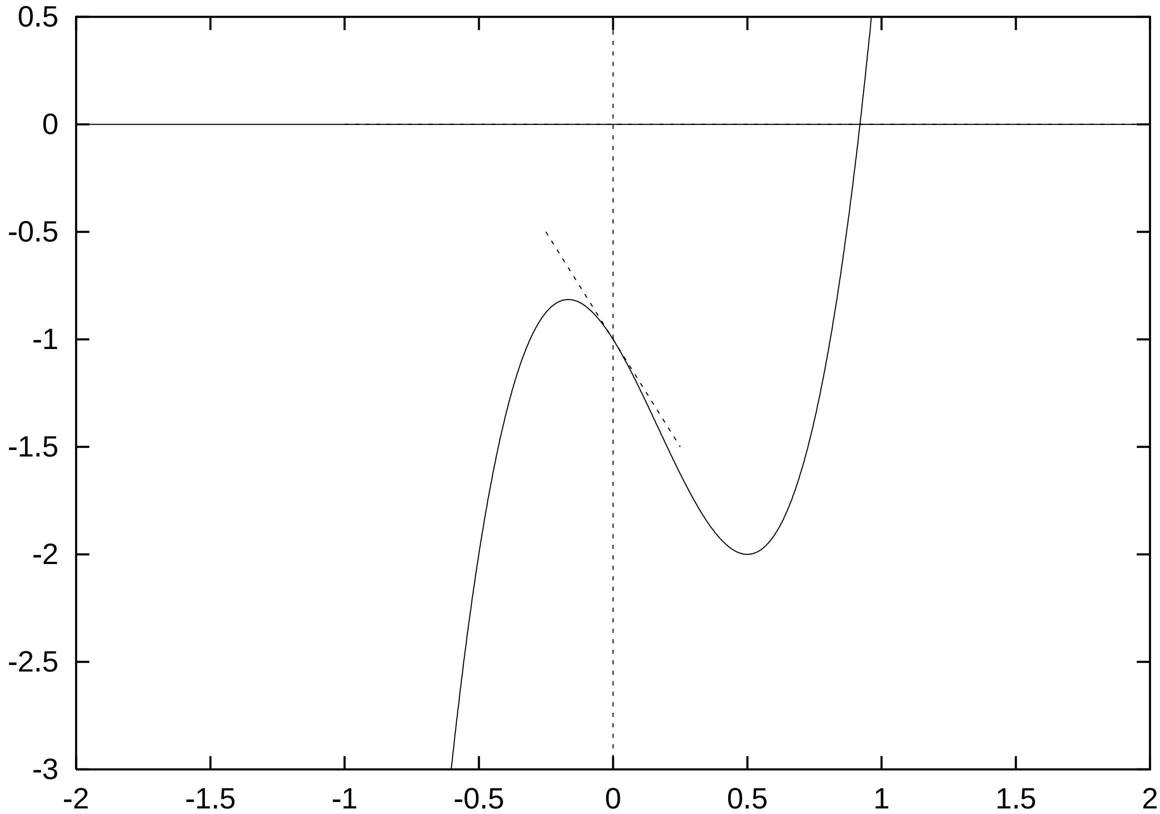
Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Quelle est la tangente en 0 de la courbe de $g : x \mapsto 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$?

Solution :

La dérivée de $\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$ est celle de u/v avec $v = \sqrt{w}$ pour $u = 1 = x$, $w = 1 + x^2$. Appliquant les formules usuelles, on finit par arriver à $(1-x)/(1+x^2)^{3/2}$.

$g(0)$ vaut -1, $g'(0)$ vaut -2 donc l'équation de la tangente est $y = -2x - 1$.



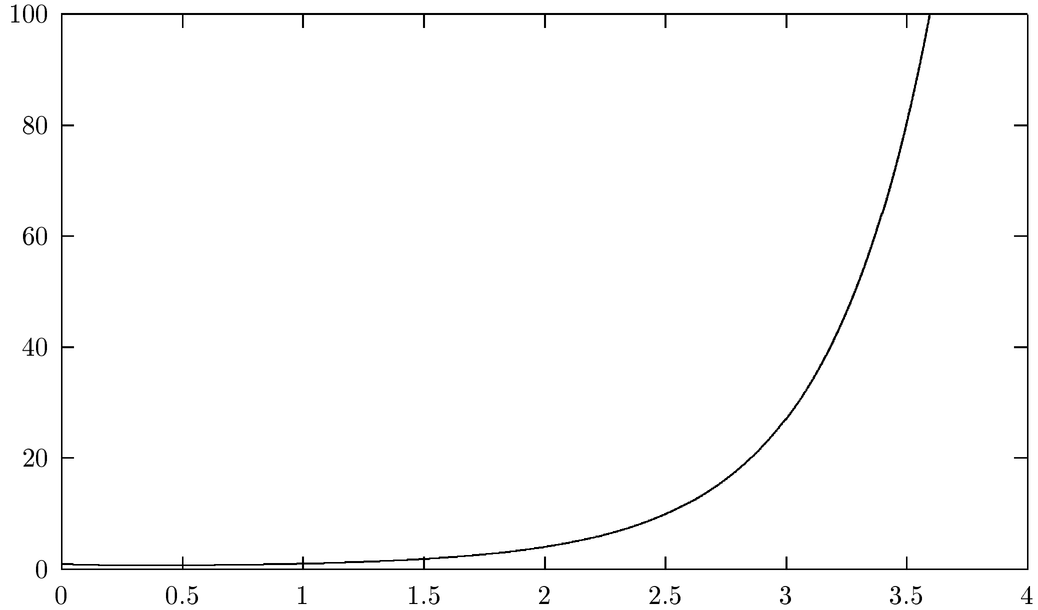
$\diamondsuit$

Exercice 3.5

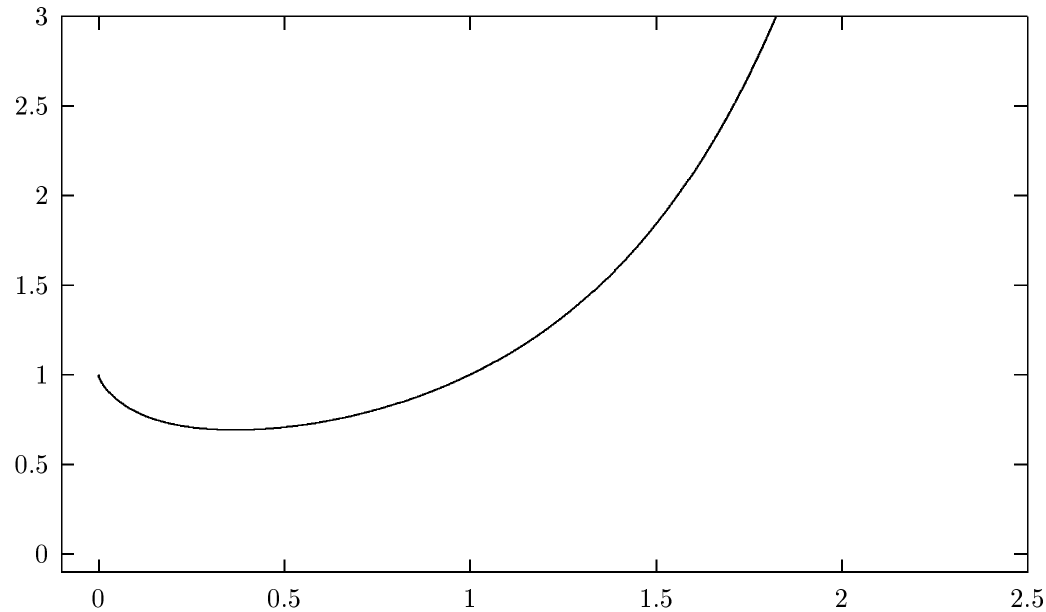
Etudiez les fonctions $x \mapsto x^x$ et $x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$.

Solution :

Puisque $x^x = e^{xlog(x)}$ il faut $x > 0$. Lorsque x devient infini, y aussi. Calculons la limite en 0. Puisque "x l'emporte sur le log", y tend vers e^0 c'est à dire 1 lorsque x tend vers 0. La dérivée de y est $x^x(log(x) + 1)$ qu'on trouve en posant $y = e^\alpha$ avec $\alpha = xlog(x)$. Cette dérivée s'annule en $x = 1/e$ soit à peu près 0,37. On peut montrer que f n'est pas dérivable en 0 et que $1/e$ est un minimum de la fonction, qui par ailleurs croit très vite.



Tracé sommaire de $x \mapsto x^x$



Tracé plus fin de $x \mapsto x^x$ au voisinage de $1/e$

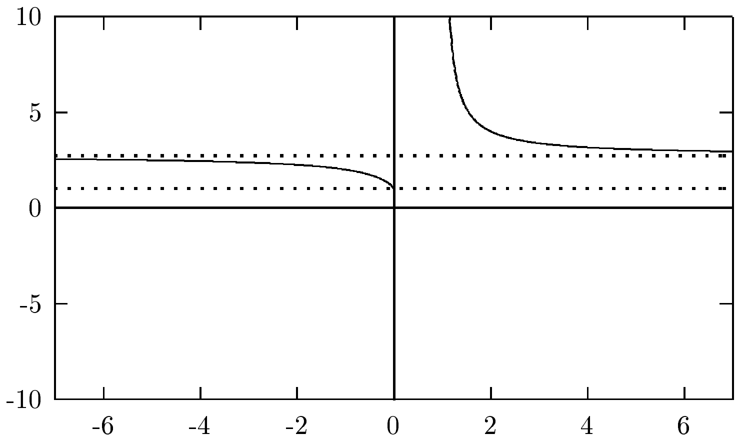
La fonction $x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$ n'est définie que pour $\frac{x}{x-1} > 1$ soit donc hors de l'intervalle $[0, 1]$. Ecrivant y sous la forme $1/(1-1/x)^x$ on "voit" que y tend vers $1/e$ si x est infini. Lorsque x tend vers 0, y tend vers 1 et si x tend vers 1, y tend vers $+\infty$. Le signe de y' est difficile à étudier directement (on pourrait montrer que f n'est pas dérivable à l'origine). Utilisant la dérivée logarithmique $z = y'/y$, l'étude de z aboutit au tableau de variation suivant

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
z'(x)	$-$			$+$
z(x)	0 ↘			↗ 0

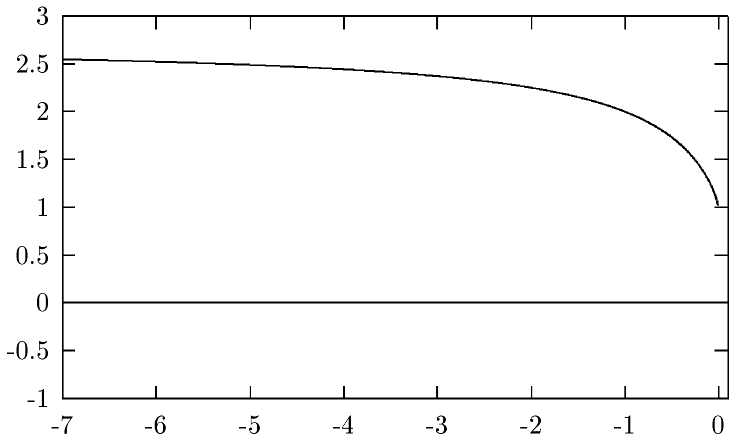
d'oú y' est toujours négatif, le tableau de variation de y est alors :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'(x)	$-$			$-$
y(x)	e ↘ 1			$+\infty$ ↘ e

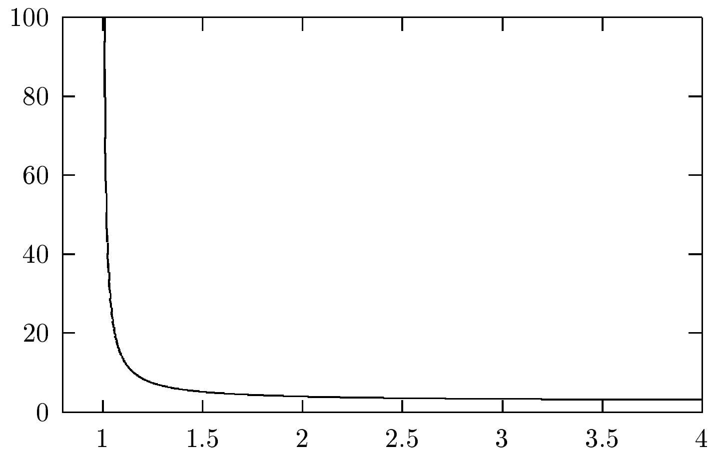
Voici donc un tracé sommaire de la fonction



Voici un tracé plus précis de la fonction.



Tracé de $x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ pour $x < 0$



Tracé de $x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ pour $x > 1$

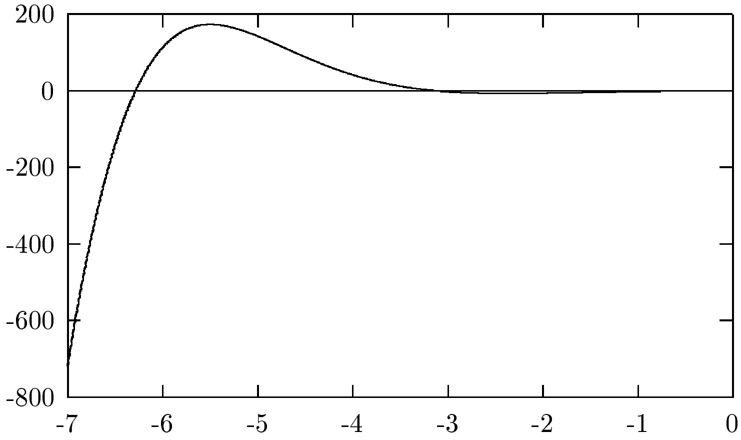
$\diamondsuit$

Exercice 3.6

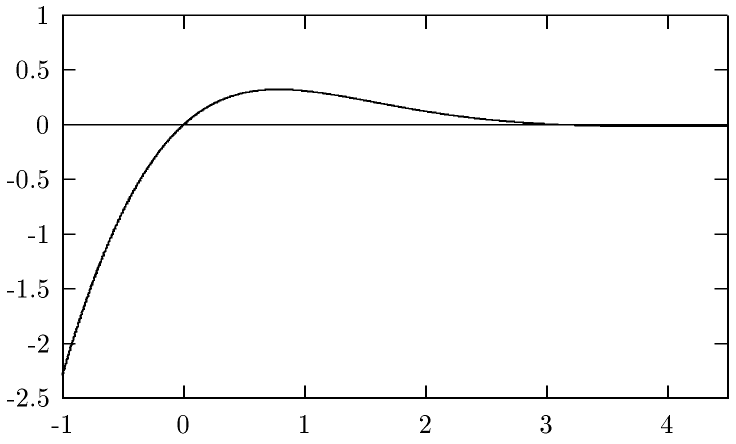
Etudiez la fonction $x \mapsto e^{-x} sin(x)$.

Solution :

Il n'y a aucune difficulté pour cette fonction. Elle diminue en oscillant autour de l'axe des x, comme le montrent les courbes suivantes.



Tracé de $x \mapsto e^{-x} sin(x)$ pour $x < 0$



Tracé de $x \mapsto e^{-x} sin(x)$ pour $x > 0$

$\diamondsuit$

Exercice 3.7

Quel est la liaison entre sin^2 et cos^2 ? Trouver une formule analogue pour ch^2 et sh^2.

Quelle est la dérivée de th en fonction de ch ?

Quelle est la dérivée de $Arcsin$?

Montrez que $Argch$ et $Argsh$ s'écrivent sous la forme $log(\ x + \sqrt{T(x)}\ )$ où T est un polynôme en x.

Montrez que $Argth$ s'écrit sous la forme $log(\ S(x))/2$ où S est le rapport de deux polynômes en x.

Solution :

Bien sûr $sin^2 + cos^2 = 1$ ce qui se démontre à partir des définitions $sin(a) = (e^{ia} - e^{-ia})/2i$ et $cos(a) = (e^{ia} + e^{-ia})/2$. Puisque $sh(a) = (e^a - e^{-a})/2$ et $ch(a) = (e^a + e^a)/2$, on en déduit $ch^2 - sh^2 = 1$ (on peut imaginer qu'on remplace cos par ch et sin par $i.sh).th'$ vaut $1 - th^2$ soit encore $1/ch^2$.

A partir de $(f \circ g) = Id$, on trouve $f' \circ g.g' = 1$ donc la dérivée de f^{-1} est $1/f' \circ f^{-1}$ donc la dérivée de $Arcsin$ est $1/sin'(Arcsin) = 1/cos(Arcsin) = 1/\sqrt{1 - Id^2}$.

Additionnant $sh(y) = x$ et donc $ch(y) = \sqrt{1 + x^2}$ on déduit $e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$ d'où

$$y = Argsh(x) = log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

De même, d'où $y = Argch(x) = log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et $Argth(x) = log(S(x))/2$ pour $S(x) = (1 + x)/(1 - x)$.

$\diamondsuit$

Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1

Donner les dérivées successives de sin en $x = 0$; en déduire les premiers termes du dl de sin. Même question pour log et pour un polynôme quelconque de degré d.

Solution :

$sin(0) = 0$, $sin'(0) = cos(0) = 1$ etc. D'où la suite périodique de valeurs 0,1,0,-1 pour la suite des dérivées en zéro. Une autre façon de faire est de remarquer que $sin(n)(x) = sin(x + n\pi/2)$. On en conclut que $sin(x) = x - x^3/3!... = \sum(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$.

Le calcul des dérivées de log en zéro n'a aucun sens. Par contre, on peut s'intéresser aux dérivées de $x \to log(x + 1)$ pour $x = 0$. On peut dériver une fois (ce qui donne $1/(1 + x)$), deux fois ($-1/(1 + x)^2$) ou bien directement intégrer terme à terme l'équation $1/(1+x) = 1 - x + x^2 ... + (-1)^n x^n$.

Pour le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, on trouve facilement

$$\begin{aligned}
P^{(k)}(x) &= \sum_{i=k}^{d} i(i-1)...(i-k+1)a_i x^{i-k} \\
&= \sum_{i=k}^{d} \prod_{j=0}^{k-1}(i-j)a_i x^{i-k} \\
&= \sum_{i=k}^{d} i!/(i-k)!a_i x^{i-k}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Exercice 4.2

Montrer que D n'est pas multiplicative, c'est à dire que $D(fg) \neq D(f)D(g)$.

Solution :

Soit f définie par $f(x) = x^2$. Un calcul direct de $D(f)$ aboutit à $D(f)(x) = 2x$.

En effet

$$\begin{aligned} D(f)(x) &= \lim \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \text{ pour } h \to 0 \\ &= \lim \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x \end{aligned}$$

Comme $D(x) = 1$, si D était multiplicative, on aurait $D(f)(x) = D(x^2) = D(xx) = D(x)D(x) = 1.1 = 1$

$\diamondsuit$

Exercice 4.3

Trouver une primitive de $1/(1+x^2)^2$ et de $1/(16x^2 - 32x + 25)$.

Trouver une primitive de $1/cos$ puis de $sin^3(2x)$.

Solution :

a) pour $1/(1+x^2)^2$, effectuons le changement de variable $x = tg(u)$ alors l'intégrale devient $(1 + tg^2(u)du/(1 + tg^2(u))^2$ soit $du/(1 + tg^2(u))$ qui est directement la primitive de $cos^2(u)$ soit $\dfrac{1 + cos(2u)}{2}$.

b) $16x^2 - 32x + 25$ peut s'écrire $16(x-1)^2 + 9$. Utilisant le changement de variable $x - 1 = 3u/4$ l'intégrale cherchée est $\dfrac{1}{16}\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2 + (3/4)^2}$ soit encore $\dfrac{1}{16}\dfrac{3/4}{9/16}\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1}$ donc $Arctg(u)/12$ soit finalement $Arctg(\,4(x - 1)/3\,)/12$.

c) essayons "par hasard" de dériver $log(\,tg(x/2)\,)$. On trouve directement $1/2cos^2(x/2)tg(x/2)$ soit $1/2sin(x/2)cos(x/2)$. Comme $sin(2u)$=$2sin(u)cos(u)$ on en déduit qu'une une primitive de $1/cos$ est $x \mapsto\ log(|tg(x/2 + \pi/4)|)$.

d) à partir du développement de e^{3iu}=$(cos(u) + isin(u))^3$, en identifiant les parties imaginaires, on trouve $sin(3u)$=$4sin^3(u) - 3sin(u)$. D'où $sin^3(u) = (\ sin(3u) - 3sin(u)\ )/4$. Appliquant ici à $u = 2x$, on cherche une primitive de $(3sin(2x) - sin(6x))/4$ soit $-3cos(2x)/8 + cos(6x)/24$.

$\diamondsuit$

Exercice 4.4

Donner un primitive de $1/(x^4+1)$ sachant qu'elle est combinaison linéaire des primitives des $1/(x-\rho_i)$ où les ρ_i sont les racines du polynôme (x^4+1).

Solution :

A priori, la décomposition dite "en éléments simples" de la fraction rationnelle $1/(x^4+1)$ est

$$\frac{a_1}{x-\rho_1}+\frac{a_2}{x-\rho_2}+\frac{a_3}{x-\rho_3}+\frac{a_4}{x-\rho_4}$$

où les ρ_i sont complexes et les a_i aussi. Nous avons vu au chapitre deux une factorisation dans $\mathbb{R}$ de x^4+1 ce qui nous permet de poser directement comme décomposition

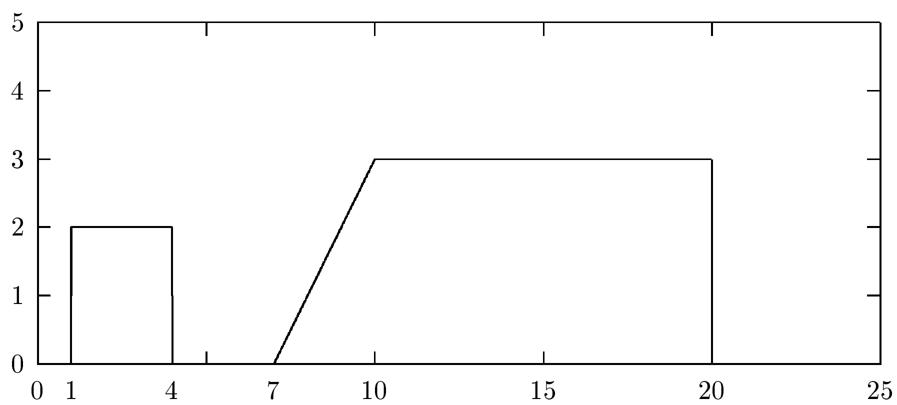
$$\frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{cx+d}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

A partir de $x=0$, soit $b+d=1$, de $x=1$, de $x=i$, en multipliant par x et en prenant la limite infinie, soit $a+c$=0, on trouve que $a=\sqrt{2}/4$=$-c$, $b=1/2=1-d$. La première partie de l'intégrale de $1/(x^4+1)$ utilise donc l'intégrale de $1/(x^2+x\sqrt{2}+1)$. Avec le changement de variable $u=x\sqrt{2}+1$, cette intégrale se réduit à celle de $\sqrt{2}/(u^2+1)$ soit $\sqrt{2}ArcTg(x\sqrt{2}+1)$. La même technique s'applique pour l'autre partie de l'intégrale.

$\diamondsuit$

Exercice 4.5

Calculer la surface du rectangle et du trapèze rectangle ci-dessous.



Solution :

Le rectangle de longueur 3 de largeur 2 a bien sûr comme surface 6, ce qu'on trouve aussi par le calcul intégral $R = \displaystyle\int_1^4 2dx = [2x]_1^4 = 2.4 - 2.1 = 8 - 2 = 6$.

Pour le trapèze, la formule directe $(b + B) * h/2$ donne $(10 + 13) * 3/2$ soit 69/2=34,5. Au niveau du calcul intégral : $T = \displaystyle\int_7^{20} f = \int_7^{10} f + = \int_{10}^{20} f$. Comme $f(x)$ vaut $x - 7$ pour x entre 7 et 10, et 3 pour x entre 10 et 20, on en déduit que T vaut $\left[x^2/2 - 7x\right]_7^{10} + [3x]_{10}^{20}$ soit (100-49)/2+30 ce qui redonne bien 34,5.

$\diamondsuit$

Exercice 4.6

Calculer par récurrence en justifiant les passages à la limite à l'aide d'une intégration par parties

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \text{ et } J_n = \int_0^\infty dx/(1 + x^2)^n$$

Solution :

Intégrons $x^n e^{-x}$ en parties avec $u = x^n$ et $dv = e^{-x}dx$ soit $v = -e^{-x}$ et $du = nx^{n-1}dx$. Alors I_n vaut $\left[-e^{-x}x^n\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x}dx$. Comme "l'exponentielle l'emporte sur la puissance", le premier terme est nul et le deuxième peut se lire nI_{n-1}. Grâce à I_0=1, on en déduit que $I_n = n!$.

Pour J_n, intégrons aussi en parties avec $du = dx$, $v = 1/(1 + x^2)^n$ soit $u = x$ et $dv = -2nx/(1 + x^2)^{n+1}$. J_n vaut donc $\left[-2nx^2/(1 + x^2)^{n+1}\right]_0^{+\infty}$ $+2n \displaystyle\int_0^\infty x^2 dx/(1+x^2)^n$. Là encore le premier terme est nul, et pour le second, utilisons l'astuce de décomposition $x^2 = (1+x^2) - 1$ ce qui permet de séparer l'intégrale en deux termes qui valent respectivement $2nJ_n$ et $-2nJ_{n+1}$. Or, si $J_n = 2nJ_n - 2nJ_{n+1}$ alors $J_{n+1} = (2n - 1)J_n/2n$ ce qui permet de conclure que $J_n = \displaystyle\prod_k (2k - 1)J_1/2^n$. On vérifiera que $J_1 = \pi/2$.

$\diamondsuit$

Exercice 4.7

Résoudre $f'(x) = f(x)^2$ et $f'(x) = (x + y)^2$, $y' + y = x^2$.

Résoudre $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Chercher une solution de $xy'' + y' + 4x^2y = 0$ sous forme d'une série entière $y = y(x) = \sum a_k x^k$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution :

Si $y' = y^2$ alors "en gros" $y'/y^2 = 1$ donc en intégrant terme à terme, $-1/y = x + K$. En fait, de façon plus rigoureuse, il faut séparer le cas $y = 0$ (d'où $y' = 0$ donc $y = 0$ est solution) et la cas $y \neq 0$, auquel cas y vaut $-1/(x+K)$ pour $x < -K$ et sur $x > -K$.

Pour résoudre $y' = (x + y)^2$, effectuons le changement de variable $g = x + y$. Alors $g' = 1+y'$ et on doit donc résoudre $g' = 1+g^2$ dont la résolution donne $ArcTg(g) = x + K$, soit finalement $y = tg(x - c) - x$.

L'équation $y'+y = x^2$ est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants. L'équation homogène associée est $y'+y = 0$ soit encore $y'/y = -1$ dont la solution est $y = Ce^{-x}$. Une solution particulière peut être cherchée sous la forme d'un polynôme du second degré, soit $y = ax^2 + bx + c$, d'où $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$ et la solution générale en est la somme, soit $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$.

L'équation suivante n'est pas *séparable* à première vue, mais on on peut, s'y ramener car $y' = (y + \sqrt{x^2 + y^2})/x$, ce qui suggère le changement de variable $y = tx$ d'où $\sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + t^2})$, soit $y' = t + \sqrt{1 + t^2}$ d'une part, $y' = t'x + t$ d'autre part, ce qui aboutit à $t'/\sqrt{1 + t^2} = 1/x$ ou encore, pour $t = sh(\varphi)$: $d\varphi = 1/x$. Intégrant terme à terme, "il vient" $x = Ce^{\varphi}$, soit finalement $y = Ce^{\varphi}sh(\varphi) = c(e^{2\varphi} - 1)/2 = x^2/2c - c/2$.

Enfin, pour l'équation de *Bessel* $xy''+y'+4x^2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, si $y = y(x) = \sum a_k x^k$ alors $y' = \sum k a_k x^{k-1}$ et $y'' = \sum k(k-1)a_k x^{k-2}$. Le coefficient de x^k dans la somme $xy'' + y' + 4x^2y$ est a_1 pour x^0, $2a_2$ pour x^1, $4a_{k-2} + (k + 1)^2 a_{k+1}$ pour x^k avec $k \geq 2$. Puisque $y(0) = a_0 = 1$ et $y'(0) = a_1 = 0$, on a $a_2 = 0$ et $a_k = -4a_{k-3}/k^2$ ou, puisque les a_k ne sont non nuls que pour k multiple de 3 : $a_{3k} = -4a_{3(k-1)}/9k^2$.

♢

Exercices du chapitre 5

Exercice 5.1

Etudier la convergence des suites arithmétiques, des suites géométriques et des séries associées.

Solution :

Si $u_n = u_{n-1} + a$ alors par récurrence, $u_n = u_0 + n \times a$. Si a =0 alors la suite est constante de valeur u_0 et donc de limite u_0. Si $a \neq 0$ alors (u_n) diverge (sa limite est en fait $sg(a)\infty$).

Si $v_n = v_{n-1} \times b$ alors par récurrence, $v_n = v_0 \times b^n$. Si b =0 alors la suite est constante de valeur 0 et donc de limite 0. Si $|b| < 1$ alors (v_n) converge vers 0. Si b vaut 1, (v_n) est constante de valeur v_0 et donc de limite v_0. Si b vaut -1 alors (v_n) diverge (mais admet les deux valeurs d'adhérence v_0 et $-v_0$). Enfin, si $|b| > 1$, (v_n) diverge.

La série $\sum u_n$ a pour terme général $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + n.a$ soit encore s_n=$(n+1)u_0 + n(n+1)a/2$. Donc (s_n) diverge pour toute valeur de a.

La série $\sum t_n$ a pour terme général $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 b^k$ soit, après quelques efforts, t_n= $u_0(1 - b^{n+1})/(1 - b)$ pour $b \neq 1$ et $(n+1)u_0$ pour $b = 1$. Si $|b| < 1$ alors (t_n) converge vers $u_0 b/(1 - b)$; sinon, elle diverge.

$\diamondsuit$

Exercice 5.2

Trouver la forme compacte de la suite arithmético-géométrique définie par $u_n = au_{n-1} + b$.

Solution :

Posons $v_n = u_n + c$ et admettons que $v_n = av_{n-1}$. Alors, en remplaçant les u_i par leur valeur correspondante en v_i dans $u_n = au_{n-1} + b$, on trouve c=$b/(a-1)$ pour $a \neq 1$. (v_n) est géométrique de raison a donc $v_n = v_0 a^n$ soit $(u_0 + c)a^n$ d'où $u_n = a^n(u_0 + c) - c$.

$\diamondsuit$

Exercice 5.3

Résoudre $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ nommée suite de $Fibonacci$ sachant que la solution est $a\rho_1^n + b\rho_2^n$ où ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation caractéristique associée : $X^2 = X + 1$. On prendra $u_0 = u_1 = 1$.

Quel est l'ordre de grandeur de u_n ?

Solution :

L'équation $X^2 = X + 1$ admet $\rho_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ et $\rho_2 = (1 + \sqrt{5})/2$ comme racines. Si $u_n = a\rho_1^n + b\rho_2^n$ alors pour $n = 0$: $a + b = 0$ et pour $n = 1$: $a(1 - \sqrt{5}) + b(1 + \sqrt{5}) = 1$ donc $a = b = -1/\sqrt{5}$.

ρ_1 vaut à peu près `-0,618` et ρ_2 `1,618` ; comme $|\rho_1| < 1$, ρ_1^n tend vers zéro pour n infini donc u_n est de l'ordre de ρ_2^n soit $1,618^n$.

♢

Exercice 5.4

Dans le pire des cas pour la méthode de tri nommée $QuickSort$, le nombre L_n de comparaisons dans le mode de découpage ("split") vérifie la relation $L_n = L_{n-1} + n - 1$. Quel est sa forme compacte sachant $L_0 = 0$?

Solution :

$L_0 = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 = 1$, $L_3 = 1 + 2$. Par récurrence $L_n = 1 + 2 + ... + (n-1)$ donc $L_n = n(n-1)/2$. Son ordre de grandeur est donc $n^2/2$.

♢

Exercice 5.5

Dans la méthode de tri nommée $QuickSort$, le nombre moyen F_n de comparaisons vérifie la relation $F_n = n - 1 + (\sum F_{i-1} + \sum F_{n-i})/n$ où à chaque fois les sommes sont prises pour i de 1 à n. Quel est son ordre de grandeur ?

Solution :

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} F_{n-1}$, F_n vaut $(n-1) + 2\sum_{i=1}^{n} F_{i-1}/n$. Le calcul $nF_n - (n-1)F_{n-1}$ simplifie de nombreux termes et mène à

$$F_n = \frac{n+1}{n}F_{n-1} + 2\frac{n-1}{n}$$

La théorie générale pour résoudre $x_n = a_n x_{n-1} + b_n$ dans le cas général consiste à définir y_n par $y_0 = x_0$ et $x_n = y_n p_n$ où p_k désigne le produit $a_1 a_2 ... a_k$ car alors on a seulement à résoudre $y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j$ si $c_j = b_j/p_j$.

Pour le cas qui nous intéresse, $a_n = (n+1)/n$ et $b_n = 2(n-1)/n$ donc $p_n = n+1$ et c_n se simplifie en $2\dfrac{n-1}{n(n+1)}$, avec $y_0 = 0$.

F_n se réduit donc à $(n+1)y_n$ avec $y_n = 2\sum_{j=1}^{n} \dfrac{j-1}{j(j+1)}$. Décomposant $\dfrac{j-1}{j(j+1)}$ en $\dfrac{2}{j+1} - \dfrac{1}{j}$, une dernière simplification mène à $F_n = 2(n+1)H_n - 4n$ où H_n est la suite harmonique "bien connue" $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$.

Une touche d'intégration permet de prendre $\int_1^n g$ comme approximation de $\sum_{j=1}^{n} g(j)$ ce qui fournit ici, pour $g(j) = 1/j$ l'ordre de grandeur $2nlog(n)$.

♢

Exercice 5.6

En théorie des graphes, un ensemble indépendant est un ensemble de sommets dont aucune paire n'est reliée par une arête. Dans le pire des cas, le nombre de calculs pour trouver la taille du plus grand ensemble indépendant d'un graphe de n sommets est le nombre f_n qui vérifie $f_n \leq cn^2 + f_{n-1} + f_{n-2}$. Quel est l'ordre de grandeur de f_n ?

Avec une optimisation classique, on aboutit aisément à la nouvelle inéquation $f_n \leq cn^2 + f_{n-1} + f_{n-3}$. Quel est le nouvel ordre de grandeur de f_n ?

Solution :

Si on s'intéresse aux seuls termes f_n, f_{n-1} et f_{n-2} l'équation caractéristique sous-jacente est $X^2 = X + 1$ qu'on a déjà vu à l'exercice **5.3** dont l'ordre de grandeur de f_n est majoré par $c^n = 1,619^n$.

De plus, avec les notations du théorème fondamental $g(n) = cn^2$ qui est négligeable devant c^n donc l'ordre de grandeur est $1,619^n$.

Avec l'optimisation, la nouvelle équation caractéristique est $X^3 = X^2 + 1$

dont la plus grande racine est aux environs de `1,46557` et donc on peut majorer l'ordre de grandeur par $1,466^n$ ce qui est nettement meilleur que $1,619^n$.

$\diamondsuit$

Exercice 5.7

Combien faut-il de multiplications pour multiplier deux matrices de taille n ?

La méthode rapide de multiplications des matrices, dite méthode de *Strassen*, n'utilise que g_m multiplications avec $g_m = 7g_{m-1} + 18.4^{m-1}$. Y gagne-t-on vraiment quelque chose si $n = 2^m$?

Solution :

Puisque qu'il y a n^2 termes à calculer pour le produit de 2 matrices $n \times n$ et que chaque terme est une somme de n termes $a_{i,k}b_{k,j}$ on a n^3 multiplications par la méthode normale. Pour calculer la forme compacte de g_p on pose, comme à l'exercice **5.5** $g_m = y_m p_m$ avec ici $p_j = 7^j$ et $y_m = y_{m-1} + \frac{6}{2}\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{4}{7}\right)^m$. Si on majore par la somme totale de la série, y_m est inférieur ou égal à $\frac{9}{2} \times \frac{1}{1-4/7}$ soit $21/2$ et donc finalement g_m a pour ordre de grandeur 7^m.

Si $n = 2^m$ alors $7^m = 7^{log_2(n)} = n^{log_2(7)}$. Comme $log_2(7)$ vaut à peut près `2.81`, il y a une réelle amélioration.

$\diamondsuit$

Exercice 5.8

Montrer qu'effectivement la série de terme général $1/n$ ne converge pas.

Vers quoi converge la série $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$?

Solution :

Si la série de terme général $1/n$ converge, alors la suite t_n de terme général $t_n = s_{2n} - s_n$ doit tendre vers 0, où s_n est la suite des sommes partielles de u_n, à savoir : $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Mais $t_n = s_{2n} - s_n = \sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k$ donc t_n est supérieur à

$n \times 1/2n = 1/2$; or, si t_n est supérieur à n, la suite (t_n) ne peut pas tendre vers zéro. Donc $\sum 1/n$ diverge.

Pour la série $\sum 1/(n+1)$, utilisons la décomposition des fractions rationnelles : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ donc la somme partielle à l'ordre n vaut $1 - 1/(n+2)$ et $\sum 1/(n+1)$ converge vers 1.

$\diamondsuit$

Exercice 5.9

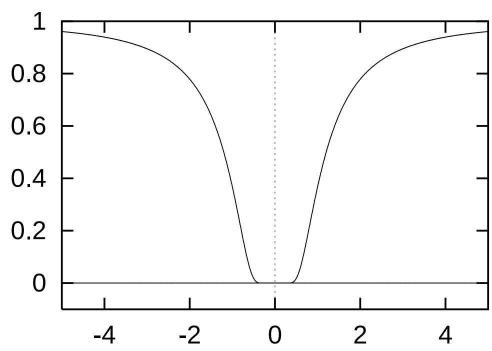
Donner le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ (on prolongera f par continuité en $x = 0$). Vers quoi converge la série de f ?

Retrouver le développement classique de *exp*, *log*, *sin*...

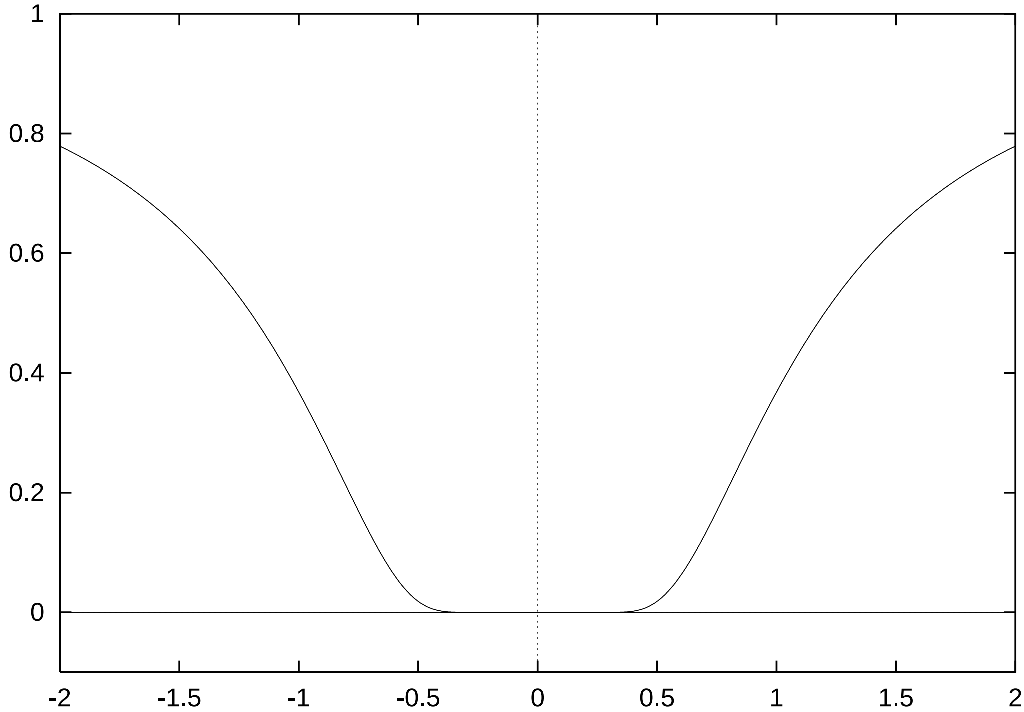
Solution :

Puisque "*l'exponentielle l'emporte sur la puissance*", il est raisonnable de poser par continuité $f(0) = 0$ et f est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Il est simple de montrer que $D(f)(0) = 0$. Comme $f'(x)$ vaut $-2e^{-1/x^2}/x^3$, f' est continue en zéro de limite 0 en $x = 0$.

$f''(x) = (2 + 6x^2)e^{-1/x^2}/x^6$ et f'' est continue en zéro de limite 0 en $x = 0$. Par récurrence, $f^{(k)}(0) = P(x)e^{-1/x^2}/x^m(n)$ où P est un polynôme en x et m une fonction croissante de n à valeurs entières. Donc $f^{(k)}$ a pour limite 0 en $x = 0$. f est donc une fonction non nulle dont le dl en 0 est nul à tout ordre. Un tracé rapide de f permet de comprendre pourquoi :



Si on zoome sur l'origine, on voit encore mieux pourquoi le polynôme nul est la seule approximation correcte de la fonction en 0 :



$exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout k, le dl de exp en 0 à l'ordre n est $\sum_{k=0}^{n} x^k/k! + R_n$.

$sin^{(k)}(0) = sin(x + k\pi/4)$ donc $sin^{(2k)}(0) = 0$, $sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k+1}$ et le dl de sin en 0 à l'ordre n est $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}x^{2k+1}/(2k+1)! + R_n$.

Le dl de log en 0 n'a aucun sens. Par contre, celui de $x \mapsto log(1+x)$ s'obtient en intégrant le dl de la dérivée : $log(1+x)' = 1/(1 = x)$, d'où :

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum(-1)^k x^k$. Le dl de $x \mapsto log(1+x)$ en 0 est donc $\sum(-1)^k x^{k+1}/(k+1)$.

$\diamondsuit$

Exercice 5.10

Donner la série de $Fourier$ de f où $f(x) = sin(x)$.

Donner la transformée de $Fourier$ de la fonction g, 2π-périodique définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2\pi]$. En déduire $\sum \frac{1}{n^2}$.

Donner la transformée de $Fourier$ de la fonction h, 4π-périodique si $h(x) = x$ pour $x \in [0, 2]$.

Solution :

Comme $sin(x) = 0+1.sin(x)+0.sin(2x)+0.sin(3x)$, et puisque le développement en série de $Fourier$ est unique, le développement en série de $Fourier$ de sin est sin.

Si $g(x) = x^2$, a_0 vaut $\int_0^{2\pi} x^2 dx/\pi$ soit $8\pi^2/3$. De plus, intégrant en parties deux fois, dont la première avec $dv = cos(nx)$ et $u = x^2$, on a :

$$a_n = \int_0^{2\pi} x^2 cos(nx)dx/\pi = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{sin(nx)}{n} - 2x\frac{-cos(nx)}{n^2} + 2\frac{-sin(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$

soit, après simplification, $a_n = 4/n^2$.

$$b_n = \int_0^{2\pi} x^2 sin(nx)dx/\pi = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{-cos(nx)}{n} - 2x\frac{-sin(nx)}{n^2} + 2\frac{cos(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$

soit, après simplification, $b_n = -4\pi/n$.

On peut donc écrire $\mathcal{F}(g)(x) = \dfrac{4\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{n} \dfrac{4}{n}\left(\dfrac{cos(nx)}{n} - \pi sin(nx)\right)$.

En $x = 0$, le théorème de $Dirichlet$ permet d'écrire $4\dfrac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{n} \dfrac{4}{n^2} = \dfrac{1}{2}\left(0 + 4\pi^2\right)$ d'où, après simplification $\sum\ 1/n^2 = \pi^2/6$.

Si h est paire et 4π-périodique et si $h(x) = x$ pour $x \in [0, 2]$ alors b_n vaut 0, a_0 est 2 et a_n vaut $-\dfrac{4}{n^2\pi^2}\,(cos(n\pi) - 1)$ en intégrant en parties, c'est à dire $a_n = 0$ si $n = 2k$ et $a_n = -8/n^2\pi^2$ si $n = 2k + 1$.

En considérant la fonction k **paire** 2π-périodique définie par $k(x) = sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$, on trouverait le développement de sin en une série de cosinus :

$$\mathcal{F}(sin)(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \sum_{n\geq 2} \frac{1 + cos(n\pi)}{n^2 - 1} cos(nx)\right) = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum_{n\geq 2} \frac{cos(2nx)}{4n^2 - 1}\right)$$

$\diamondsuit$

Exercice 5.11

Appliquer l'identité de *Parseval* à la fonction de l'exercice à l'une des fonctions de l'exercice précédent pour en déduire $\sum \frac{1}{n^4}$.

Solution :

L'identité de *Parseval* appliquée à l'extension paire de $f : x \mapsto x$ considérée comme fonction périodique de période 4 et définie par $f(x) = x\ x \in [0, 2]$, donne $\frac{8}{3} = 2 + \sum_{n=2k+1} \frac{64}{n^4\pi^4}$ donc la somme $T = \sum_{n=2k+1} \frac{1}{n^4}$ vaut $\pi^4/96$.

Décomposant $S = \sum_n \frac{1}{n^4}$ en $\sum_{n=2k} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=2k+1} \frac{1}{n^4}$ et puisque $(2n)^4 = 16n^4$, on déduit que $S = S/16 + T$ soit finalement $S = \pi^4/90$.

$\diamondsuit$

Et voilà !

Chapitre 7.

Maple et les mathématiques

7.1 Le logiciel Maple

Maple est un logiciel dédié au calcul formel et appliqué. Un calcul formel, en opposition au calcul numérique, utilise des inconnues, comme $(a+b)^n$ sans que a et b n'aient de valeur donnée. *Maple*, *Mathematica*, mais aussi *Reduce*, *Macsyma* savent traiter ce genre de problèmes. Toutefois ce ne sont que des programmes avec leur faiblesses, leurs limitations. Nous aurons l'occasion de nous en rendre compte avec certains calculs (peut-être) faux ou (apparemment) aberrants...

Maple gère des expressions et des instructions, saisies au clavier ou lues dans des fichiers, ce qui fournit plusieurs modes d'utilisation :

- le mode interactif, c'est à dire sous forme d'un logiciel standard avec des menus, des fenêtres, des raccourcis-clavier ;
- un mode ligne, sans interface, qui permet l'utilisation de *Maple* à distance, en *telnet* par exemple ou l'utilisation en mode *batch* c'est à dire en automatique dans un script ;
- en mode web, c'est à dire sous forme de pages exécutables sans qu'on puisse accéder au programme-source.

Pour des raisons de commodité, nous ne présenterons ici que des instructions *Maple* que l'on pourra saisir directement dans l'environnement *Maple*.

7.2 Utilisation de Maple

Pour évaluer une expression en *Maple*, de même que pour exécuter une instruction, il suffit de taper le texte de l'expression, et de le terminer par un point virgule puis de valider par la touche "Entrée".

Nous présenterons de telles expressions avec le prompt standard de *Maple* qui est le signe "supérieur à". Ainsi

```
> expand((1+x)^3) ;
```

$$1 + 3\,x + 3\,x^2 + x^3$$

signifie que nous avons demandé à *Maple* de développer avec la fonction `expand` l'expression $(1+x)^3$. Le résultat correspond est alors centré sur la ligne suivante.

Maple permet d'exporter dans divers formats LaTeX, *Html*, *Pdf*, les diverses instructions et expressions ainsi que leurs résultats. Lorsqu'on entre une instruction terminée par le symbole "deux-points", *Maple* se contente de calculer sans rien afficher. Cela permet d'économiser quelques lignes de sortie.

Par exemple, au lieu de

```
> x:= 0 ;
```

$$x := 0$$

```
> y := x + 1;
```

$$y := 1$$

on pourra écrire

```
> x:= 0 :
> y := x + 1;
```

$$y := 1$$

Pour quitter *Maple* en mode ligne, il faut utiliser la commande `quit`.

Lorsque *Maple* se contente de répéter l'instruction entrée, cela signifie que *Maple* n'a rien compris. Par contre lorsqu'il n'affiche rien, c'est qu'il calcule. S'il réaffiche le prompt sans rien d'autre, c'est qu'il n'a rien trouvé ou qu'on ne lui a pas demandé d'écrire le résultat, la différence entres ces deux possibilités étant parfois difficile à faire !

7.3 Prise de contact avec *Maple*

Maple "sait" calculer des expressions numériques et formelles :

```
>  2^1996 ;
```

717581684546409077645520750736051240013948563805434500298526710510\
61039133702314461604121789478164186990287278993671642334044493505\
39409582141207097604158240869562432158201750004304869676500280446\
43079368789678902988509664778992727467073141275291471231815622848\
85149925559039350351456978096010263873145792584010556811528656600\
14871780049462868130842353127681266979416411440762550826476758073\
50792427073254124372122761329388612411502526349908239532213055896\
18880745034684861474354502447505122326039411422211276598982875970\
52179915121450340680720473649266407346472055005142767317612284086\
0136553196814336

```
>  expand((1+x)^3) ;
```

$$1 + 3\,x + 3\,x^2 + x^3$$

Les notations utilisées sont semblables à celles des mathématiques quand c'est possible, mais il faut parfois chercher le nom (inspiré de l'anglais) des fonctions :

```
>  2^3, 3**2 ,(7 mod 5)=irem(17,8), iquo(35, 8), gcd(1250,500);
```

$$8\ ,\ 9\ ,\ 2\ =\ 1\ ,\ 4\ ,\ 250$$

Maple distingue les entiers des rationnels, des réels et des nombres complexes. On peut avoir une idée de la notion de nombre en tapant

```
>  help (number) ;
>  ? number
```

La précision de l'affichage et des calculs internes se fait via *printf* et *evalf* :

```
>  1.23456^1.3 ;
```

$$1.315121453$$

```
>  evalf(1.23456^1.3,20) ;
```

$$1.315121453$$

```
>  printf(`%20.15f`,1.23456^1.3) ;
```

```
   1.315121453000000
```

Par défaut, *Maple* utilise une variable nommée *Digits*. On consultera l'aide associée par

```
> ? Digits
> ? precision
```

Voici ce qui se passe si on change la valeur de cette variable :

```
> Digits := 40 ;
```

$$Digits := 40$$

```
> evalf(1.23456^1.3,40) ;
```

$$1.315121452504295229799837254523450562238$$

Maple essaie de travailler en multiprécision avec les entiers, les rationnels. Il peut donc "coincer" :

```
> 1996 ^1996 :
> 1996^(1996^1996) :

Error, integer too large in context
```

Les calculs classiques peuvent se faire avec des affectations via le symbole := ; un cas particulier consiste à mettre dans une variable son "nom" ce qui en fait une variable formelle et non pas une valeur numérique (ce qui est le cas par défaut).

```
> x := 2 ; y := x+2 ; x := 3 ;
```

$$x := 2$$
$$y := 4$$
$$x := 3$$

```
> y ;
```

$$4$$

```
> x := 'x' ; x := `x` ;
```

$$x := x$$
$$x := x$$

```
> x ;
```

$$3$$

Attention à la notion de "transparence référentielle" : si x n'existe pas, $y := x$ lie x et y : modifier x change automatiquement y. Par contre si x a une valeur, y ne reçoit que cette valeur. Changer x ne modifie alors rien pour y.

On pourra consulter les autres structures utilisées par *Maple* via

```
> ? set
> ? list
> ? vector
> ? seq
```

Les constantes reconnues par *Maple* sont

```
> constants ;
```

$$false, \gamma, \infty, true, Catalan, FAIL, \pi$$

On se méfier des fonctions de *Maple*. Ainsi, on sait résoudre en classe de troisième la factorisation de x^4+1 à partir du développement de $(x^2+1)^2$, ce que *Maple* semble ignorer :

```
> factor(x^4+1) ;
```

$$x^4+1$$

Maple répond ici l'expression de départ. Cela signifie qu'il n'a rien trouvé Dans d'autres cas, par exemple pour *solve*, il affiche une ligne vide quand il ne trouve rien (ce qui est difficile à comprendre au début). Si on veut suivre en détail ce que fait la fonction, on pourra écrire

```
> infolevel[factor] := 4 ;
```

Mais il faut relancer *Maple* (par restart) avant de refaire le calcul.

7.3.1 Structures de données

7.3.2 Suites d'expressions

Une structure élémentaire en *Maple* est celle de suite d'expressions (*exprseq* en anglais), c'est à dire une succession ordonnée d'expressions *Maple*. Entourée d'une accolades, c'est donc un ensemble ; entourée de crochets, c'est une liste. Ainsi 3,2,3 est une *exprseq*, {3,2,3} est l'ensemble {2,3}, [3,2,3] est une liste (ordonnée et indicée).

Comme *Maple* travaille au niveau syntaxique, $\{x, y\}$ est donc *a priori* incorrectement interprété comme un ensemble à deux éléments, ce que montrent les commandes

```
> restart ; nops({x,y}) ;
```

$$2$$

La fonction *seq* permet de générer une suite d'expressions (ce qui est parfois incorrectement écrit "séquence d'expressions" à cause du terme anglais *expression sequence*).

Par exemple :

```
> a := seq(i*i,i=1..3) ;
```

$$a := 1, 4, 9$$

```
> [a] , {a} ;
```

$$[1, 4, 9]\ ,\ \{1, 4, 9\}$$

seq a trois formes. Sa syntaxe est *seq(x,y)* où x est une expression ou une fonction et y une plage de variation ou une expression. Si f est une fonction définie par `f := x -> x+1` alors les expressions $seq(i+1, i=1..n)$ et $seq(f(i), i=1..n)$ sont équivalentes. Pour la troisième forme, on peut écrire $seq(f(i), i=[a,b,c])$ ou $seq(f(i), i=\{a,b,c\})$. On obtient alors $f(a), f(b), f(c)$. Il faut remarquer que *seq* ne renvoie pas de structure mais seulement une suite d'expression (on verra plus loin que ce n'est pas le cas de *map*). Par contre, il n'est pas possible d'écrire* `j := i=1..n ; seq(f(i),j)`.

seq s'utilise pour afficher des valeurs de fonction, de suite. Si on voulait trouver une expression qui utilise *seq* pour afficher $1, 3, 9, 12, 14$, il faudrait faire des hypothèses sur le modèle sous-jacent. Dire ce que ces valeurs sont celles d'un polynôme en $1, 2, 3, 4, 5$ déboucherait sur une *interpolation polynomiale*, par exemple celle de *Lagrange*. Sinon, on pourrait penser à d'autres types de fonctions...

La fonction *convert* permet de transformer les ensembles et listes en d'autres structures. Ainsi :

```
> convert([seq(`i`,i=1..10)],`+` ) ;

  55
```

D'autres fonctions calculent aussi la somme des n premiers entiers. Ainsi `sum(i,i=1..n)` et `add(i,i=1..n)` fournissent, si n est connu et possède une valeur numérique, le même résultat numérique. Si par contre n n'a pas de valeur (ce qu'on peut reproduire avec `n :='n' :`) alors *add* ne sait plus calculer et *sum* affiche la valeur formelle de la somme. Ou plutôt le polynôme correspondant. On le reconnaîtra mieux sous sa forme factorisée.

Voici ce que *Maple* effectue dans ces trois cas :

```
> convert(seq(i,i=1..n),`+`) ;

Error, unable to execute seq
> add(i,i=1..n) ;

Error, unable to execute add
```

* Pourquoi ?

```
>   s := sum(i,i=1..n) ;
```

$$s := \frac{1}{2}\,(n+1)^2 - \frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}$$

```
>   factor(s) ;
```

$$\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

On prendra garde à la *forme inerte* `Sum` qui s'écrit avec une majuscule. Elle permet seulement à *Maple* d'afficher une expression comme :

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Les formes inertes servent à "faire joli". On peut donc les utiliser pour écrire des documents interactifs et exécutables complets, qui allient texte, formules et résultats.

7.3.3 Evaluation du temps de calcul

La fonction *time* permet de compter la durée d'exécution d'une commande et on peut donc comparer la conversion en somme des fonctions sum et product grâce aux instructions

```
n := 200 :
i:='i':deb:=time():sum(`i`,`i`=1..n):time()-deb ;
     0

convert([seq(`i`,`i`=1..n)],`+`):time() -deb;
     .054

product(`i`,`i`=1..n) :time() -deb ;
     .055

convert([seq(`i`,`i`=1..n)],`*`):time() -deb ;
     0
```

La boucle pour (for) permet également d'effectuer des calculs répétitifs, dont des sommes et des produits :

```
i :='i':deb := time() :
for j from 1 to 200 do :
```

```
    sum(`i`,`i`=1..n) :
od : time() -deb ; i := 'i' :
     3.460

deb := time() :
for j from 1 to 200 do :
     product(`i`,`i`=1..n) :
od : time() -deb ; i := 'i' :
     14.116

deb := time() :
for j from 1 to 200 do :
  s:=0 :
  for i from 1 to n do : s := s + i : od :
od : time() -deb ; i := 'i' :
     3.405

deb := time() :
for j from 1 to 200 do : fact(n) : od :
time() -deb ;
     0
```

On en déduit donc les vitesses (différentes) d'exécution et quelles fonctions il faut utiliser.

7.3.4 Les listes

Une liste se reconnaît par les crochets en début et en fin de liste. Son nombre d'éléments est donné par la fonction *nops*. Nous fournissons ici quelques exemples de manipulation sur les listes :

```
> L:=[seq(i,i=1..10)] ; nops(L); L[2] ;
```

$$L := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

$$10$$

$$2$$

$$n := 10$$

$$L := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

$$24$$

Ainsi, pour inverser une liste L sur elle-même on peut écrire (même s'il y a de meilleures solutions avec des fonctions "directes" comme `map`, `reverse`... :

```
>   L := [$1..10] ; n := nops(L) ; L := [seq(L[n+1-i],i=1..n)] ; length(L) ;

          L := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

          n := 10

          L := [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]

          24

>   S := {$1..10} ; n := nops([S]) ; op(4,S)

          S := {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

          n := 1

          4
```

Une autre façon de travailler sur les listes consiste à utiliser la fonction *map*, souvent conjointe à l'opérateur $:

```
>  map(x->x+1,[1,2,4]) ; map(x->x-1,{1,2,4}) ; 3$4 ; $2..5 ;
                        [2, 3, 5]
                        {0, 1, 3}
                        3, 3, 3, 3
                        2, 3, 4, 5
```

Là encore il faut se méfier des temps d'exécution :

```
>  deb := time() : for j from 1 to 200 do
>  convert(map(i->i,{$1..n}),`+`):od: time() -deb ; i := 'i' :
                          .439
>  deb := time() : for j from 1 to 200 do:
>  convert(map(i->i,[$1..n]),`+`):od: time() -deb; i := 'i' :
                          .549
```

7.3.5 Vecteurs et Matrices

Une variable classique correspond à un nom et une valeur. Une structure indicée permet d'associer à un nom plusieurs valeurs, accessibles via une fonction d'indexation à un ou plusieurs indices. *Maple* reconnaît comme telles structures les listes, les tableaux, les vecteurs et matrices... Si un tableau (ou une table) au sens informatique du terme peut se définir via l'instruction `array`, un vecteur se se définit par l'instruction `vector` et une matrice se définit par l'instruction `matrix`. Les indices d'un `array` sont en nombre quelconque. Leur plage de variation est fixe, numérique mais non limitée à des entiers. Par contre pour `vector` et `matrix` on indique la valeur maximale des indices car ceux-ci commencent forcément à 1. La principale différence entre ces trois instructions réside dans la reconnaissance par *Maple* d'opérations spéciales pour les différents types. Il est possible de remplir ces structures indicées en fournissant explicitement la liste des valeurs à la suite des indications de dimension ou par fonction sur les indices ou après la définition avec une boucle (`seq`, `map`, `for` ...). A titre d'exemple, nous commençons par construire une liste L de taille 5 dont les valeurs sont $1, 2, 3, 4, 5$, puis le vecteur S correspondant à $L + 1$ et nous montrons ensuite comment calculer "à la main" puis en notation fonctionnelle la somme Z de S et L.

```
L := [$1..5] :                  # renvoie [1,2,3,4,5]
S := map( x->x+1, L ) :         # renvoie [2,3,4,5,6]
Z := L + S ;                    # renvoie [3,5,7,9,11]
sommeListe := (x,y) -> x+ y :
Z := sommeListe(L,S) ;          # renvoie [3,5,7,9,11]
```

Passons maintenant aux vecteurs. Comme précédemment, nous construisons un vecteur V de taille 5 dont les valeurs sont $1, 2, 3, 4, 5$, puis le vecteur W correspondant à $V + 1$ et nous montrons ensuite comment calculer "à la main" puis en notation fonctionnelle la somme U de V et W.

```
V := vector(5,[$1..5]) :                # renvoie [1,2,3,4,5]
W := vector(5,[ seq(V[i]+1,i=1..5) ]) : # renvoie [2,3,4,5,6]
sommeVecteur := (x,y) ->
     vector(5,[ seq(x[i]+y[i],i=1..5) ]):
U := sommeVecteur(V,W) ;                # renvoie [3,5,7,9,11]
```

Pour disposer d'une fonction qui calcule d'elle-même la taille du vecteur, il faut "ruser". Cette dimension est au choix `nops( convert(x,list)` ou `nops([ entries(x) ])` et on peut donc écrire[†] :

```
sommeVecteur := (x,y) ->
vector( nops( convert(x,list)) ,
        [ seq(x[i]+y[i],i=1..nops( convert(x,list) ) ) ]
      ) ;
```

Malheureusement cette écriture fonctionnelle avec $->$ oblige à écrire deux fois cette quantité. On lui préfère en général une écriture dite "procédurale" qui commence par `proc` que nous détaillerons plus loin.

[†] pour réaliser le cadrage et l'indentation affichée, on appuie simultanément sur la touche "Entrée" et sur la touche majuscule

Enfin, prenons la matrice M de taille 3 correspondant à la table d'addition, ajoutons-la à la matrice de la table de soustraction, multiplions-la par elle-même.

```
M := matrix(4,4, (i,j) -> i+j ) ;
N := matrix(4,4, (i,j) -> i-j ) ;
evalm(M+N)  ;
evalm(M&*M) ;
```

7.3.6 Structures d'actions

Une structure d'actions permet de dérouter le cheminement séquentiel des instructions tapées au clavier : on peut ainsi choisir entre différentes actions, "boucler" sur une suite d'actions communes (nommée *corps de boucle*). Nous commençons donc par rajouter la structure alternative si (*if*) pour compléter nos actions algorithmiques[‡].

```
> f:=x->if x<3 then x+1 elif x <5 then x-1 else x*x :fi:

> map(f,[$1..10]) ;
```

$$[2, 3, 2, 3, 25, 36, 49, 64, 81, 100]$$

Profitons-en pour essayer de calculer des nombres intéressants de la bibliothèque "théorie des nombres", les nombres de $Mersenne$

```
> ? mersenne

  ...

> map(numtheory[mersenne],[$1..10]) ;
```

$$[\mathit{false}, 3, 7, \mathit{false}, 31, \mathit{false}, 127, \mathit{false}, \mathit{false}, \mathit{false}]$$

Sachant que la fonction *isprime* renvoie vrai si son argument est premier, essayons de donner une expression qui affiche les nombres de mersenne 2^x-1 pour x de 1 à 10.

```
> map(x ->if isprime(2^x-1)then 2^x-1 else false:fi,[$1..10]);
```

$$[\mathit{false}, 3, 7, \mathit{false}, 31, \mathit{false}, 127, \mathit{false}, \mathit{false}, \mathit{false}]$$

```
> map( x -> if isprime(2^x-1) then 2^x-1 : fi ,[$1..10]) ;
```

$$[3, 7, 31, 127]$$

[‡]Attention : on peut ici se contenter de renvoyer une valeur au lieu d'exécuter une action, ce qui ne manquera pas de choquer ou gêner un programmeur "classique".

Mathématiquement, si on démontre que pour avoir 2ˆx-1 premier, il faut x premier, le calcul va beaucoup plus vite :

```
> map( x -> if isprime(x) and isprime(2^x-1) then 2^x-1 : fi
,[$1..10]) ;
```

$$[3, 7, 31, 127]$$

```
> b := 100 ;
```

$$b := 100$$

```
> deb := time() : map( x -> if isprime(2^x-1) then 2^x-1 : fi
,[$1..b]) ;: time() -deb ; i := 'i' :
```

$$[3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, 618970019642690137449562111]$$

$$2.417$$

```
> deb := time() : y := map( x -> if isprime(x) and isprime(2^x-1)
then 2^x-1 : fi ,[$1..b]) : time() -deb ; i := 'i' :
```

$$.055$$

On peut alors afficher ces différents nombres de mersenne :

```
> y ; nops(y)
```

$$[3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, 618970019642690137449562111]$$

$$10$$

```
> length(y) ;
```

$$92$$

Nombres aléatoires

Essayons maintenant de tester la qualité du générateur de nombres aléatoires (nombres en fait uniformément répartis) nommé *rand*. Nous allons compter pour cela compter avec 1000 nombres entre 1 et 100 combien sont supérieurs à 50.

```
> y := map(1+rand(100),[$1..1000]) :
> z := map(x-> if x>50 then 1 : fi , y ) : convert(z,`+`) ;
```

$$508$$

```
> convert( map(x-> if x>50 then 1 : fi ,
> map(1+rand(100),[$1..1000]) ),`+`) ;
```

$$475$$

7.3.7 Compléments sur les structures

Nous fournissons ici les principales fonctions utilisables sur les structures *listes* et *ensembles* :

domaine	*Maple*
ensemble	union
	intersection
	minus
	select
liste	member
	subsop

Signalons au passage que les fonctions `convert`, `map`, `nops`, `op`, `seq sort` s'appliquent (au moins) à ces deux types de structures.

7.3.8 Compléments sur les expressions

Maple gère les expressions par des arbres d'expressions. Ainsi $sin(2*x+a)+b$ a 2 opérandes, $sin(2x+a)$ et b. L'opérande numéro i est obtenu par $op(i,S)$ où S est la structure considérée. A titre d'exemple, on pourra s'amuser à détailler les instructions suivantes :

```
> f := x**2*exp(3/2)*sin(Pi/3-1/x);
```

$$f := x^2\, e^{(3/2)} \sin(\frac{1}{3}\,\pi - \frac{1}{x})$$

```
> nops(f),[op(f) ],length(f),op(3,f);
```

$$3,\ [x^2,\ e^{(3/2)},\ \sin(\frac{1}{3}\,\pi - \frac{1}{x})],\ 50,\ \sin(\frac{1}{3}\,\pi - \frac{1}{x})$$

```
> op(1,op(op(3,f)));
```

$$\frac{1}{3}\,\pi$$

On peut agir sur les opérandes via *subsop* (et non pas *subs*) qui requiert à gauche de la relation de substitution le numéro de l'opérande :

```
> subsop(3=cos(x),f);
```

$$x^2\, e^{(3/2)} \cos(x)$$

> f;

$$x^2\, e^{(3/2)} \sin(\frac{1}{3}\,\pi - \frac{1}{x})$$

Il est alors aisé de fournir une explication pour la non-substitution suivante :

> subs(n=2,1+n) ; subs(a+b=2,1+a+b) ;

```
3 ; 1+a+b
```

Maple est ici incapable de voir la chaîne $a + b$ comme il voit la chiné (réduite à un seul caractère) n car elle est stockée comme l'arbre (a,'+',b). Pour forcer *Maple* à substituer, il faut ici recourir à un parcours entier de l'arbre (coûteux en temps) via :

> simplify(1+a+b,{a+b=2}) ;

On notera au passage l'inversion de l'ordre des paramètres : on dit $subs(rel, expr)$ mais $simplify(expr, rel)$, ce qu'on peut mémoriser par les phrases "on substitue rel dans $expr$" et "on simplifie $expr$ sachant que rel".

Donc en résumé : *Maple* travaille sur des arbres d'expression, on accède aux branches par op, on les modifie par subsop.

Boucles

La structure tant que (while) permet de faire des boucles dont on sort quand la condition n'est pas remplie comme par exemple :

```
> i:=2; while (i*i-35<0) do i := i +1 ; od :
```

La boucle while de *Maple* correspond à la structure `tant que` traditionnelle des programmeurs. Il faut donc en particulier ne pas oublier d'incrémenter la variable sur laquelle on fait le test, sinon *Maple* boucle et il ne se passe plus rien !

Et maintenant, avec la fonction select, essayons de calculer la somme des $1/2^p$pour p premier, p de 2 à 1000.

Tout d'abord vérifions que l'on sait trouver les nombres premiers entre 1 et 100 (on passera à 2 et 1000 juste après) :

```
> select(isprime,[$1..100]) ;
```

[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]

```
> convert([seq(1/2^p,p=select(isprime,[$1..1000 ]))],'+') ;
```

5554198481938377907850558291786122081247094133911048363204704074 1\
864925962690189199490370199857132769324973620446950729585743066 63\
4811176262380201188156689492967722342745060326297628023779045011 4\
0672912769089311544651110735958727397629248407652614894370968806 6\
2223121657784654685552088740185806749761 /13393857589828341511\
8553131132500226320175601463191700930468798546293881390617015311 6\
4979735196198226594933411469414335314839316071153925544980721968 3\
7321850491820971853028873177634325632796392734744272769130809372 9\
4774265842484594489569299325963286432139955971081777095755372895 6\
578048354650708508672

```
> convert([seq(1/2^p,p=select(isprime,[$1..1000]))],'+'):time()-deb;
```

4.559

```
> convert([seq(1.0/2^p,p=select(isprime,[$1..10 00]))],'+') ;
```

.4146825099

```
> convert([seq(1.0/2^p,p=select(isprime,[$1..1000]))],'+') :time()-deb;
```

.933

7.3.9 Fonctions et programmation

Contrairement aux langages classiques et à l'algorithmique traditionnelle qui utilise des modules (procédures et fonctions), *Maple* ne travaille que par fonction. Les fonctions sont donc tour à tour des programmes ou des sous-programmes, suivant qu'ils sont appelés directement ou par d'autres fonctions. Par exemple, si on a défini une fonction f et une fonction g, alors $f(x)$ est un "programme" de paramètre x, et $f(g(x))$ est un "programme" où g est un sous-programme alors que $g(f(x))$ est un "programme" où f est un sous-programme.

Une fonction consiste en un ensemble de définitions, qui peut regrouper :

- une aide à l'utilisation de la fonction
- les cas particuliers de valeurs
- la déclaration et la vérification des paramètres
- le détail des instructions du programme ou "corps" de la fonction.

Pour une "petite" définition, par exemple pour définir $f(x) = 2x$ on peut se contenter d'une écriture d'association avec le symbole `->` à savoir

```
>  f := x -> 2*x ;
```

Par contre pour écrire une définition sur plusieurs lignes, gérer des paramètres, des variables locales, il faut utiliser une structure plus lourde qui utilise le mot `proc`. Le squelette "classique" d'une fonction (nommée pour l'exemple Fm) est ainsi :

```
# Commentaires pour le programmeur
# on conseille de mettre ici les références mathématiques
# et bibliographiques importantes
Fm() := proc() ;
   if nargs = 0 then
   # la phrase suivante sera affichée si on tape Fm()
     print ` Fm(n) calcule 2^n -1 pour n entier`
   # on traite le cas particulier (elif est mis pour else if)
   elif args[1] = 0 then RETURN(1)
   # et le cas général *)
   else RETURN(2^args[1] - 1)
   fi ;
end : # surtout ne pas mettre ; car sinon,
      # la valeur renvoyée est affichée
```

Au passage, on aura remarqué que la fonction de test classique se dit `if` en *Maple*Ȧinsi, pour tester si le nombre x est positif ou négatif :

```
>  if x>0 then print(`nombre positif`)else print(` nombre inférieur ou égal à 0 `) : fi :
```

Comme le montre l'exemple précédent, il est possible de tester le nombre et la valeurs des arguments. On peut de plus tester le type des arguments.

Ainsi, l'expression `if not type([args],[name,integer]) then...` permet de vérifier que l'utilisateur a bien fourni comme paramètre un nom et un entier (dans cet ordre). *Maple* sait "bien" gérer et tester le typage...

Voici quelques autres exemples de fonctions. Tout d'abord, une fonction qui calcule les points sur un intervalle :

```
Interv := proc()
   local a,b,n,h ;
   if nargs = 0
   then
        print(`Interv(a,b,n) renvoie points dont le premier est a`) ;
        print(`                                 et le dernier est b`) ;
        print(`              n est facultatif ; par défaut : n=10`) ;
   else
       if nargs < 2
          then ERROR(` il vous faut au moins deux paramètres numériques`) ;
       else
          a := args[1] ;  b := args[2] ;
          if nargs <= 2 then n := 10 ; else n :=  args[3] ; fi ;
          h := (b-a)/(n-1) ;
          RETURN(evalm([a$n] + h*[$0..(n-1)])) ;
       fi ;
   fi ;
end :
```

puis une fonction avec "list-ability" :

```
SC := proc(x) RETURN((x+1)^2) : end:

CSC := proc(x)
    RETURN(map(a->(a+1)^2,[op(x)])) :
end:

GSC := proc(x)
   if nops([x]) = 1
      then RETURN((x+1)^2) :
      else RETURN(map(a->(a+1)^2,[op(x)])) :
   fi ;
end :
```

Explications : la fonction SC calcule le carré du successeur d'un nombre ; la fonction CSC calcule pour chaque élément d'une liste son SC et enfin la fonction GSC effectue ces deux actions, suivant le type du paramètre...

7.4 Maple : Ensembles et Fonctions

Nous reprenons ici des exercices proposés dans le chapitre correspondant.

Comme nous l'avons déjà signalé, *Maple* renvoie 2 comme nombre d'éléments de $\{ x, y \}$ via l'expression `nops({x,y})` lorsque x et y n'ont pas de valeur. Bien sûr, si on tape `y := x ;` avant de calculer ce `nops`, on obtient alors 1 comme réponse.

Pour savoir combien il y a de voyelles, on peut écrire `nops({A,E,I,O,U,Y})` et on obtient bien 6 comme réponse. Comme *Maple* sait gérer les chaînes de caractères, on peut aussi écrire `length("AEIOUY")`. Signalons au passage que `length(n)` renvoie le nombre de chiffres du nombre n. Ainsi `length(2^16)` est 20. L'évaluation de `2^16` renvoie `18446744073709551616` aurait obligé à compter à la main les chiffres. On aurait aussi pu "forcer" *Maple* à travailler en réel avec `2.0^16` ce qui renvoie `0.1844674407 x 10^20`.

L'ensemble D des nombres entiers de 0 à 10 se définit par `ED:={$0..10}` (on ne peut pas utiliser `D` comme variable car c'est une lettre réservée à la dérivation), celui des entiers de 1 à 10 que nous noterons ES par `{$1..10}`. On écrit `EP:=select(x->type(x,even),ED)` pour avoir les nombres pairs de D et pour les impairs `EI:=select(x->not type(x,even),ED)`. Si l'on veut effectuer toutes les comparaisons d'inclusion entre ces trois ensembles, il faut commencer par trouver comment écrire le test d'inclusion. Comme en maths $A \subset B$ est équivalent à $A = A \cap B$, et puisque en *Maple* le test d'égalité se fait par `evalb` et on peut donc utiliser la fonction

```
estinclusdans := (x,y) -> evalb(x = x intersect y) ;
```

On peut également utiliser la fonction `subset` de *Maple* qui renvoie la même valeur.

Pour passer en revue tous les couples possibles, nous pouvons utiliser une structure de matrice après avoir mis nos trois ensembles dans une structure nommée L :

```
L[1] := ED ;
L[2] := ES ;
L[3] := EP ;
L[4] := EI ;
n := nops(convert(L,set)) ;
inclusions := matrix(n,n, (i,j) -> estinclusdans( L[i],L[j] ) ) ;
```

L'ensemble des parties d'un ensemble se calcule en *Maple* avec la fonction `powerset`. Ce n'est pas une fonction de base. Elle se trouve dans le "package" `combinat` et pour l'utiliser il faut soit charger l'ensemble du paquetage avec la commande `with(combinat)`, soit utiliser une forme "en crochets". C'est cette seconde solution que nous utilisons ici. On écrit donc

```
E := {a,b,c} ;
combinat[powerset](E) ;
combinat[powerset]( combinat[powerset](E) ) ;
```

Maple ne peut pas servir à démontrer que toute union peut être rendue disjointe. Par contre on peut vérifier sur un exemple avec *Maple* que $A \cup B$ est bien la somme disjointe de A et $B \backslash A$:

```
A := { a,b,c,d,e } ;
B := { d,e,f,g } ;
C := B minus (B \intersect A) ;
evalb( (A union B)=(A union C ) ) ;
```

On se méfiera de l'expression

```
evalb( (A union B)=(A union ( B minus (B \intersect A)) ) ) ;
```

qui renvoie faux ($false$ en anglais) lorsque A et B n'ont pas de valeur car $Maple$ évalue syntaxiquement les deux expressions...

L'expression $\{\}$ désigne l'ensemble vide en $Maple$.

L'instruction `{} intersect A` renvoie `{}` et `{} union A` renvoie `A` comme on pouvait s'y attendre. Pour les autres expressions, on peut sur des exemples calculer $(X \cap B) \cup C$ par

```
(X intersect B) union C
```

L'ensemble E des nombres de 1 à 10 est défini par `{ $1..10 }` et pour obtenir l'ensemble $X_i = \{\ i, i+1, i+2\ \}$ on peut inventer la fonction

```
ensX := i -> { i, i+1, i+2 } ;
```

Dire qu'une famille F est un recouvrement de E signifie que la réunion des éléments de F donne E. Tester que la famille $F = \{\ X_1,\ X_3,\ X_6,\ X_8\ \}$ recouvre E se fait donc en *Maple* par :

```
F := { ensX(1), ensX(3), ensX(6), ensX(8) } ;
evalb( E = map( x -> op(x) , F ) ) ;
```

Tester si une famille est une partition est à peine plus compliqué car la seule condition à vérifier en plus du recouvrement est le test de disjonction deux à deux. La fonction correspondante à la disjonction de deux éléments est simple à écrire via `evalb` :

```
sontdisjoints := (a,b) -> evalb( {} = (a intersect b) ) ;
```

Pour appliquer ce test à tous les couples d'ensemble de la famille, on peut soit générer tous les comparaisons deux à deux avec deux `seq` emboîtés, soit construire une matrice de tests logiques puis faire un "et" logique des résultats via l'instruction `foldl`. Nous présentons ces deux solutions, celle qui utilise `seq` a notre préférence car après `matrix(...)` il faut convertir en vecteur puis en liste avant de pouvoir appliquer `foldl`. On pourrait donc penser écrire

```
F := { {}, {a}, {b} , {c}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c} } ;
n := nops(F) ;
lt := seq( seq(
             sontdisjoints( op(i,F),op(j,F)),
      j=1..n), i=1..n) ;
foldl( `and`, true,  lt) ;

mh := matrix( n,n,
       (i,j) -> sontdisjoints( op(i,F), op(j,F) )
      ) : # et non pas ;
mt := convert( convert( mh,vector), list ) ;
foldl( `and`, true,  op(mt) ) ;
```

Toutefois ces solutions sont fausses car elles passent en revue les couples (i, i) qui bien sûr ne sont pas disjoints. Il faudrait donc mettre

```
if i=j then true else sontdisjoints( op(i,F),op(j,F)) fi
```

au lieu de

```
sontdisjoints( op(i,F),op(j,F))
```

mais `seq` n'accepte pas cette écriture, alors que `matrix` le permet.

Pour bien tester qu'une famille F d'ensembles est une partition de E, il est prudent de décomposer le problème et d'écrire plusieurs fonctions. Ecrivons par exemple la fonction `recouvre` qui renvoie vrai si F recouvre E et la fonction `sontdisjoints2a2` qui renvoie vrai si les éléments **distincts** de F sont disjoints deux à deux :

```
recouvre
   :=  ( X , Y ) -> evalb( Y = ( map( x -> op(x) , X ) ) ) ;
sontdisjoints2a2 :=  proc( X ) local i,j,n,mh,mt ;
  n  := nops(X) ;
  mh := matrix( n,n,
        (i,j) -> if i=j then true
                         else sontdisjoints( op(i,X), op(j,X) ) fi
        ) ; # fin de matrix
  mt := convert( convert( mh,vector), list ) ;
  return foldl( `and`, true,  op(mt) ) ;
end ;
```

Tester si F une partition de E peut alors s'écrire de façon lisible à l'aide de

```
estpartition := ( X , Y ) ->
  if   recouvre( X, Y ) and sontdisjoints2a2( X )
       then print( X, "est bien une partition de ",Y )
       else print( X, "n'est pas une partition de ",Y )
  fi
; # fin de la fonction est estpartition
```

Il est parfois frustrant de ne pas savoir d'où vient l'erreur. Aussi, il est souvent bon d'écrire une fonction qui détaille ce qui se passe. Ce peut être juste l'affichage de la matrice mh de la fonction `sontdisjoints2a2` précédente, mais on peut aussi avoir recours à un affichage plus explicite du premier couple d'éléments non disjoints, lorsqu'il y a beaucoup d'éléments dans la matrice. Par exemple on peut écrire la fonction

```
detailleDisjonction := proc(X) local i,j,n,e1,e2;
       n := nops(X) ;
       i := 1 ;
       while i <= n do
           e1 := op(i,X) ;
           j := 1 ;
           while j <=  n do
               e2 := op(j,X) ;
               if (not i=j) then
               if not sontdisjoints( e1, e2 ) then
                    print("les ensembles",e1,"et",e2,
                          "situés en position",i,"et",j,
                          "ne sont pas disjoints ") ;
                    j := n ;
                    i := n ;
                    return false ;
               fi :
               fi :
               j := j + 1 ;
          od : # fin tant que sur j
          i := i + 1 ;
       od : # fin tant que sur i
       return true ;
end ; # de fonction detailleDisjonction
```

Passons à un problème classique de programmation : comment connaître (ou retrouver) l'ordre des paramètres ? . En principe, les paramètres sont choisis de façon "évidente" et l'ordre doit être "naturel". Le test "si F recouvre E" se traduit donc en principe par `if recouvre(F,E)` mais on pourrait avoir bien programmé les paramètres dans l'autre sens. Pour savoir dans quel ordre on doit utiliser les paramètres, *Maple* dispose de la fonction `nargs` qui renvoie le nombre de paramètres.

C'est donc un jeu d'enfants que de tester le nombre de paramètres et de rappeler la syntaxe si on ne passe aucun paramètre. Ainsi, une fois écrit

```
recouvre :=  proc( X , Y ) ;

     if nargs=0 then
        print(" recouvre(X,Y) renvoie vrai si X recouvre Y ") ;
        return ;
     fi :

     if not (nargs=2) then
        print(" attention : recouvre utilise exactement 2 paramètres ") ;
        print(" or ici vous en avez fourni ",nargs) ;
        return ;
     fi :

     ...

end ; # fin de recouvre
```

on peut taper `recouvre()` dans la session *Maple* pour voir la syntaxe d'appel de `recouvre`.

Il reste un dernier problème à soulever : celui du typage des paramètres. *Maple* dispose d'une fonction `type` qui permet de vérifier que les arguments ont le bon type et d'une fonction `whattype` pour connaître le type du paramètre :

```
recouvre :=  proc( X , Y ) ;

     ...

     if not type(X,set) then
        print(" erreur : dans recouvre(X,Y) ") ;
        print("    X doit être de type \"ensemble\"") ;
        print(" or ici, X qui vaut ",X," est de type ",whattype(X)) ;
        return ;
     fi ;

     ...

end ;
```

Le détail d'analyse des paramètres (comme de vérifier que chaque élément de F est un ensemble dans le cas du recouvrement) est un choix du programmeur. Cela peut être pratique mais cela rajoute beaucoup de lignes dans le corps de la fonction. Souvent, à partir de l'hypothèse raisonnable que l'utilisateur "sait ce qu'il fait", on peut se contenter de tester le nombre de paramètres. Mais dans certains cas, et notamment lorsqu'un programme utilise des fonctions qui appellent d'autres fonctions, seule l'analyse fine des paramètres permet de trouver ce qui pose problème...

Dans le même genre d'idées, on se méfiera de l'écriture

```
F := { {}, {a}, {b} , {c}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c} } ;
```

car *Maple* utilise un ordre quelconque des éléments de l'ensemble. Si on veut vérifier son travail élément par élément et garder une liste ordonnée des éléments de la familles, on a intérêt à utiliser une liste, soit l'expression

```
F := [ {}, {a}, {b} , {c}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c} ] ;
```

Pour tester si une famille F est une hiérarchie, on peut appliquer le même principe que pour le recouvrement.

On trouvera sur notre page web

`http://www.info.univ-angers.fr/pub/gh/cours_gH/rapm.htm`

un lien sur le fichier rapm.prm pour récupérer toutes les fonctions et les expressions *Maple* présentées ici de façon à pouvoir tester en ligne ces fonctions et expressions, par exemple pour regarder comment on teste que

$$\{\ X_1,\ (X_3 \cup X_6)\backslash(X_1 \cup X_8),\ X_8\ \}$$

est bien une partition de l'ensemble des entiers de 1 à 10 ou que

$$\{\ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

n'est pas une hiérarchie alors que

$$\{\ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

en est une.

On peut montrer sur un exemple ce que peut être E x $\mathcal{P}(E)$ à l'aide des expressions

```
E := {a,b} ;                      n := nops(E) :
F := combinat[powerset](E) ;    p := nops(F) :
M := [ seq( seq( [op(i,E), op(j,F)], j=1..p ),i=1..n) ] :
map( x -> print(op(x)) , M ) :
```

ce qui nous donne

```
a, {}
a, {a, b}
a, {b}
a, {a}
b, {}
b, {a, b}
b, {b}
b, {a}
```

En ce qui concerne les propriétés des fonctions, Maple n'est pas d'une grande aide directe car il n'est pas possible mécanique de tester si une fonction est injective, surjective... Si on se limite aux cas des fonctions de $\mathbb{R}$dans $\mathbb{R}$, Maple peut donner une indication sur les limites et les points fixes. Ainsi

```
f := x -> 2*x -1/2 ;
solve( f(x)=x) ;
```

permet de voir que x=1/2 est point fixe de la fonction $x \to 2x - 1/2$.

De même, `limit( (x-1)*(x+1)/(x^6-1),x=-1) ;\verb` permet de trouver 1/3 comme limite. Pour le démontrer, c'est une autre histoire, car Maple ne veut rien dire de plus, même en utilisant `infolevel`.

Pour les lois de composition, Maple est par contre d'un grand secours, car les calculs sont faciles à vérifier... Par exemple, pour savoir si $(x, y) \mapsto x * y - (x + y)$ est commutative, il suffit d'écrire

```
f := (x,y) -> x*y -(x+y) ;
evalb( f(x,y) = f(y,x) ) ;
```

Bibliographie

P. Goujon

Mathématiques de base pour les linguistes

Hermann, Collection Méthodes

G. Chazal

Eléments de logique formelle

Editions Hermès

R. Godement

Cours d'algèbre

Hermann

C. Jacquemin

Logique et Mathématique pour l'informatique

Masson, Collection Mémo-guides.

A. Arnold, I. Guessarian

Mathématiques pour l'informatique

Masson, Collection LMI (Logique, Mathématique, Informatique).

On pourra consulter également avec profit

C. Gomez, B. Salvy, P. Zimmerman

Calcul formel : mode d'emploi ; exemples en Maple

Masson, Collection LMI (Logique, Mathématique, Informatique).

S. Lang

Analysis I

Addison Wesley

H. Cohen

A course in Computational Algebraic Number Theory

Springer, GTM (Graduate Texts in Mathematics).