

Modèles fractals pour le traitement du signal et des images.

François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire d’Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA)

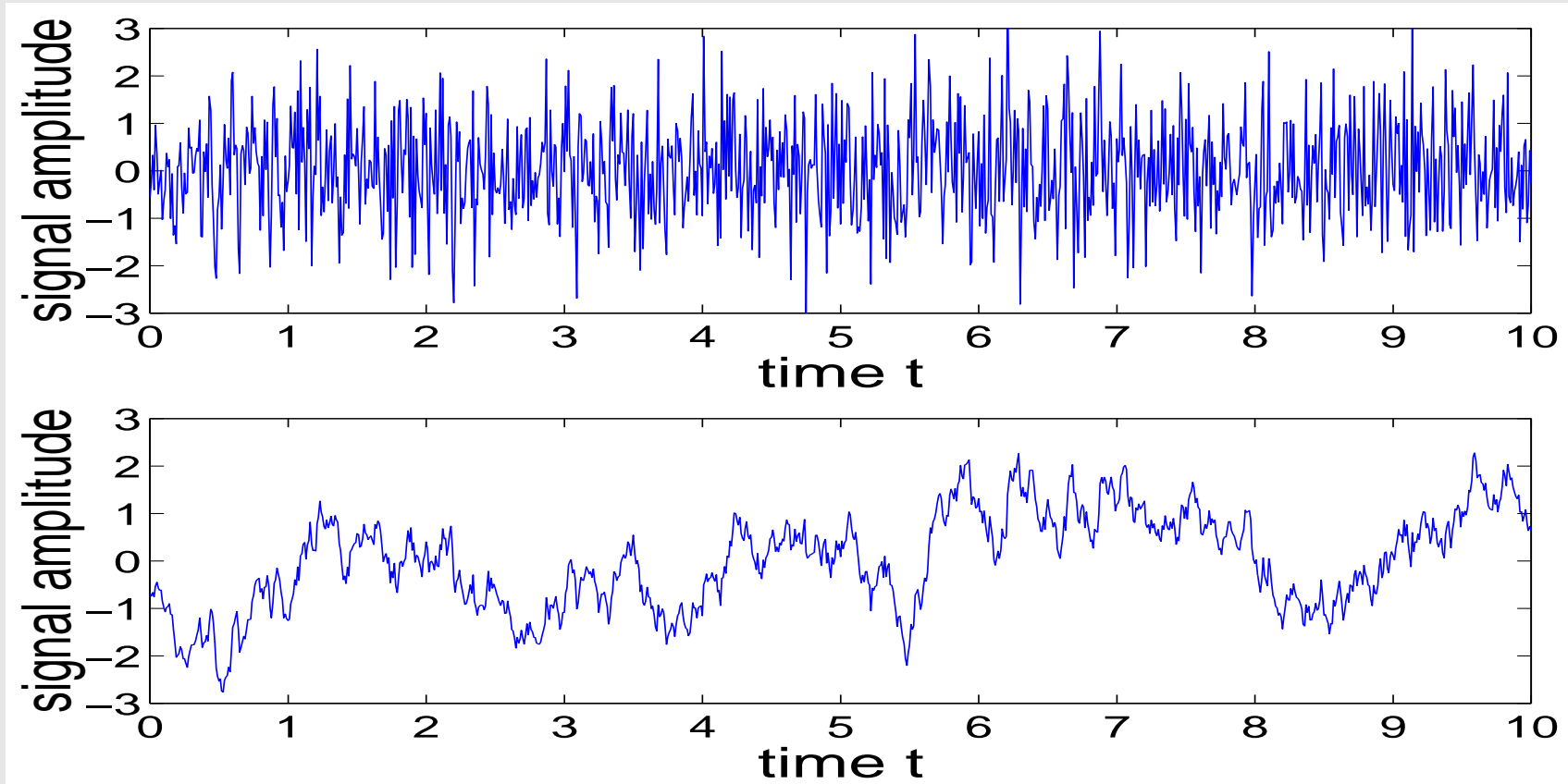
Université d’Angers – CNRS FRE 2656

<http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>



Quantités avec des évolutions temporelles compliquées

⇒ modélisées comme des signaux aléatoires.



Signaux aléatoires

⇒ caractérisation statistique (régularités, en moyenne, ...) :
moyenne, écart-type, densité de proba., ... fonction d'autocorrélation.

Fonction d'autocorrélation : $C_{ss}(\tau) = \mathbb{E}[s(t)s(t + \tau)]$

Mesure la “ressemblance”, ou la dépendance statistique, entre les valeurs prises par le signal aléatoire $s(t)$ à des instants séparés de τ .

$C_{ss}(\tau)$ maxi en $\tau = 0$, et $C_{ss}(\tau) \longrightarrow 0$ quand $\tau \longrightarrow \infty$.

Comportements typiques :

- $C_{ss}(\tau) \sim \delta(\tau)$: bruit blanc
- $C_{ss}(\tau) \sim \exp(-\tau/T_0)$: comportement “classique”
- $C_{ss}(\tau) \sim \tau^{-\beta}$: comportement **fractal**, autosimilarité statistique.

\implies Problème : Comment générés de tels signaux aléatoires fractals ?

Systeme dynamique max-plus

(Chapeau-Blondeau, *Fractals* 1998)

Condition initiale $X(0) = Y(0) = 0$,

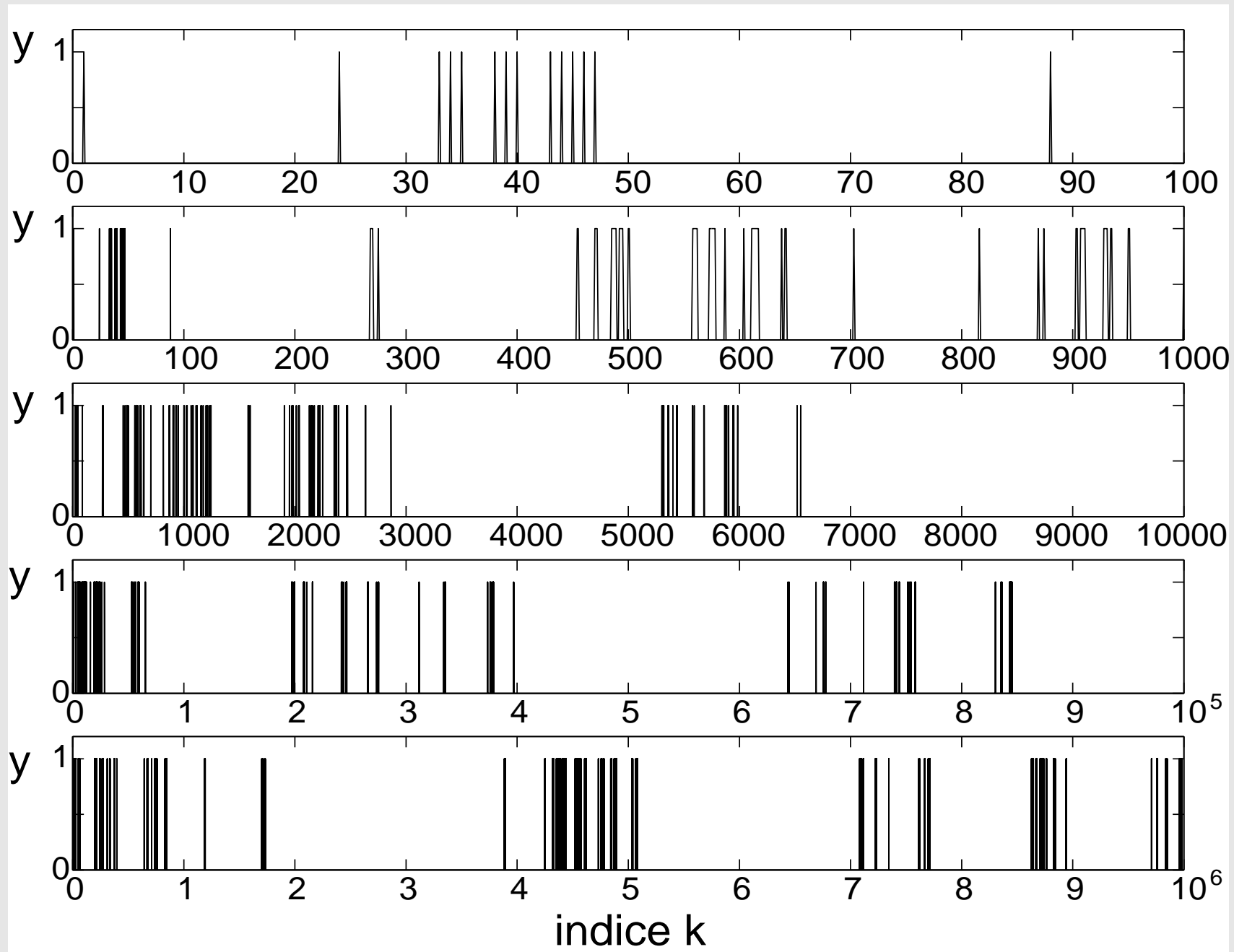
pour $k > 0$ entier,

$$\begin{cases} X(k) & = & X(k-1) + x(k) , \\ Y(k) & = & \max[Y(k-1), X(k)] , \\ y(k) & = & Y(k) - Y(k-1) , \end{cases}$$

avec séquence d'entrée $x(k)$: bruit blanc.

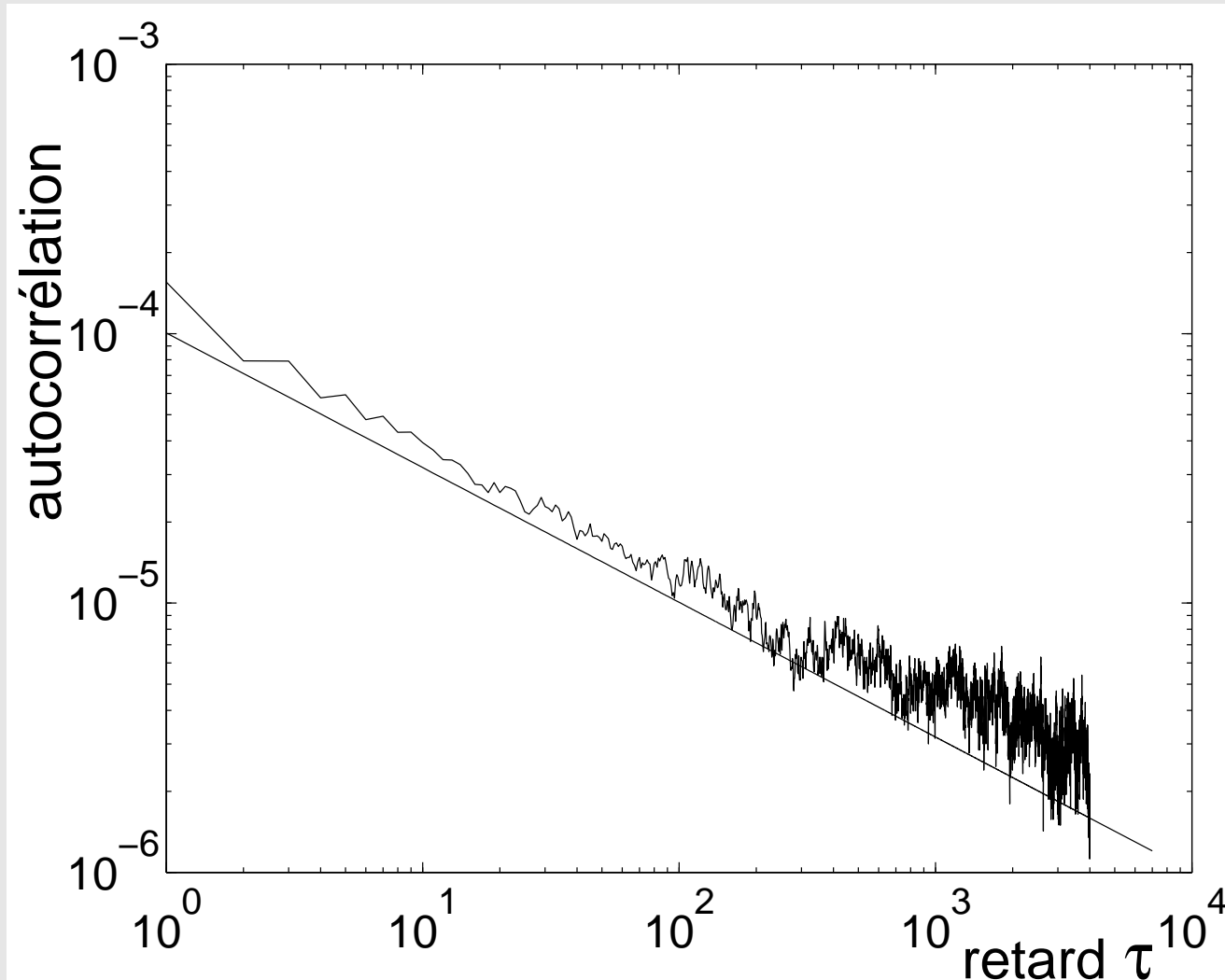
(\equiv Marche aléatoire, ou processus stochastique, non standard.)

Une réalisation du signal $y(k)$ quand $x(k) = \pm 1 \longrightarrow$ **autosimilarité**.



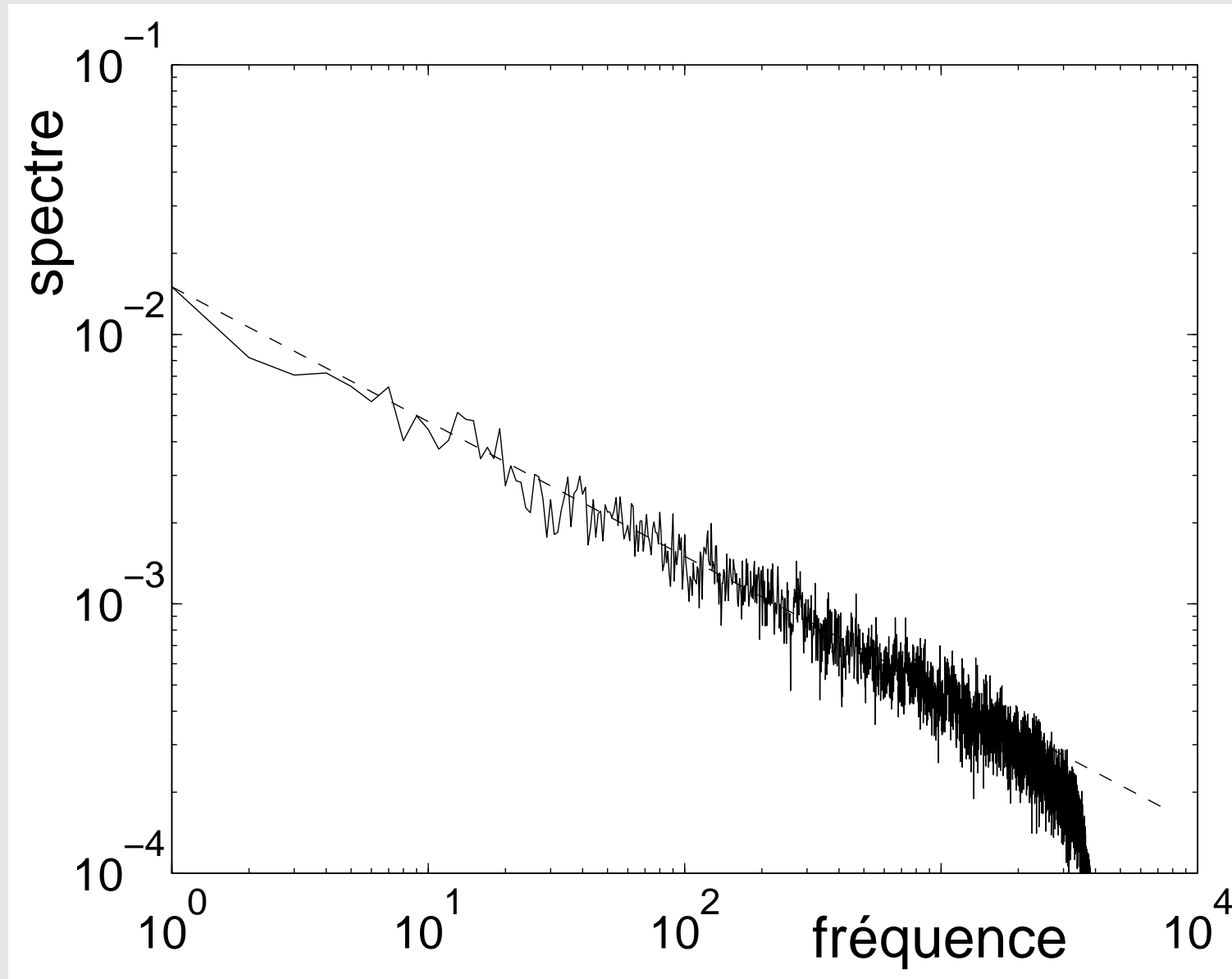
Fonction d'autocorrélation empirique sur une réalisation

$$R_{\text{emp}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k + \tau)$$



\implies autocorrélation en $\tau^{-\beta}$ avec $\beta = 0.5$.

Transformée de Fourier autocorrélation \longrightarrow spectre fréquentiel



\implies spectre en $1/f^\alpha$ avec $\alpha = 0.5$.

Analyse théorique

Pour l'autocorrélation théorique $R(k, \tau) = \mathbb{E}[y(k)y(k + \tau)]$, quand $x(k) = \pm 1$, on a $y(k) = 0/1$, et

$$\begin{aligned} R(k, \tau) &= 1 \times 1 \times \Pr\{y(k) = 1 ; y(k + \tau) = 1\} \\ &= \Pr\{y(k + \tau) = 1 \mid y(k) = 1\} \times \Pr\{y(k) = 1\} . \end{aligned}$$

À cause de la propriété de renouvellement :

$\Pr\{y(k + \tau) = 1 \mid y(k) = 1\} = U(\tau)$, une fonction de τ seul,

vérifiant $U(0) = 1$, et

$U(k) = \Pr\{y(k) = 1\} = \mathbb{E}[y(k)] = \mathbb{E}[y^2(k)]$ pour tout $k > 0$.

d'où

$$R(k, \tau) = U(k) U(\tau) .$$

On a par ailleurs $U(\tau) = \sum_{n=1}^{\tau} u(n, \tau)$,

avec $u(n, \tau) = \frac{2^{-\tau}}{\tau} n \text{ bino}[\tau, (\tau + n)/2]$ probabilité de premier passage en $X = n$ au pas τ de la marche aléatoire partie de $X = 0$ au pas 0.

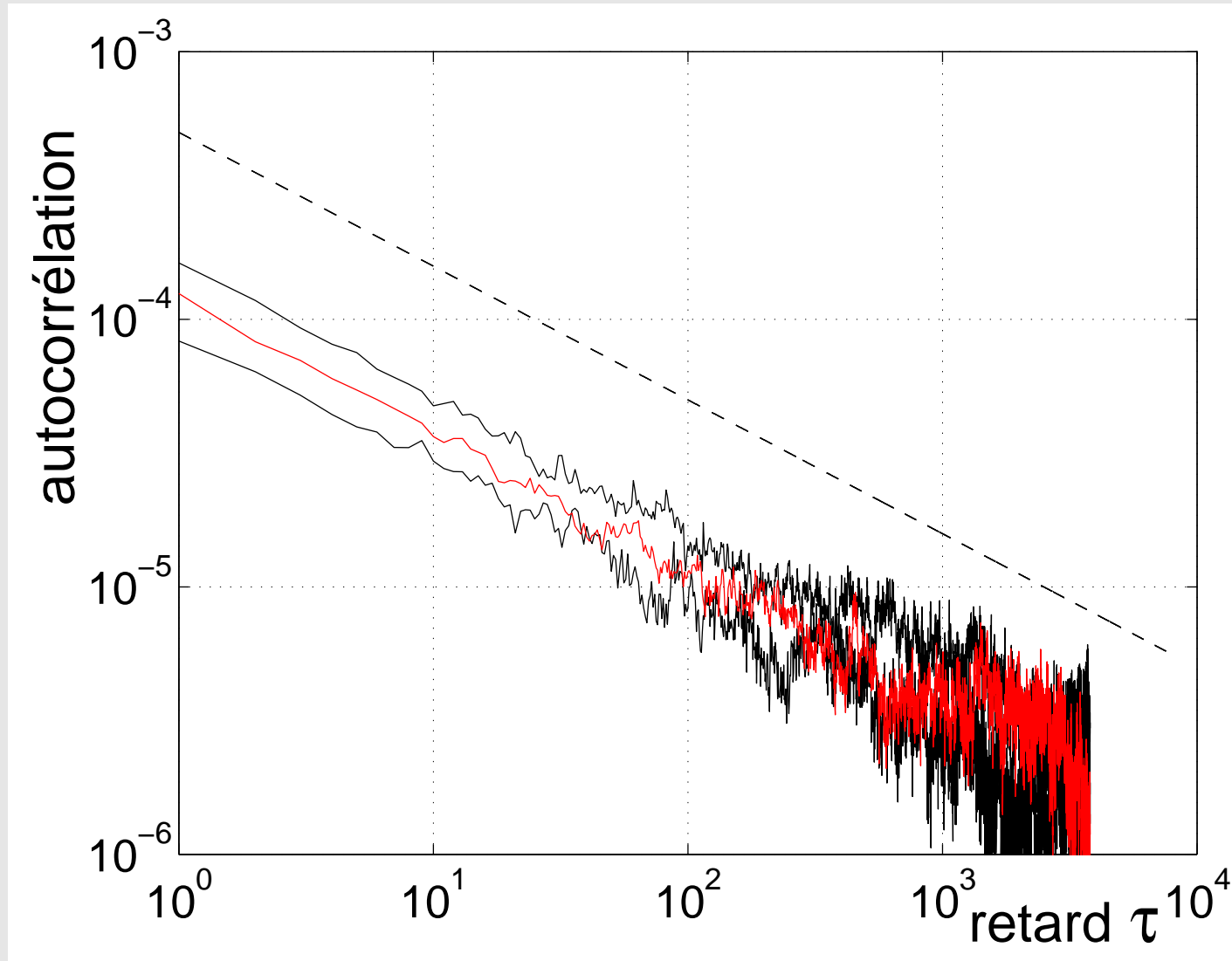
Pour τ grand, $U(\tau) = a \tau^{-1/2}$, avec $a = 1/\sqrt{2\pi}$,

et donc $R(k, \tau) = a^2 k^{-1/2} \tau^{-1/2}$, k, τ grands.

En sommant sur k on a $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R(k, \tau) = \frac{2a^2}{\sqrt{N}} \tau^{-1/2}$

\implies autocorrélation en $\tau^{-\beta}$ avec $\beta = 1/2$,

par TF \implies spectre en $1/f^\alpha$ avec $\alpha = 1 - \beta = 1/2$.



Entrée $x(k)$ gaussienne (haut),
uniforme (milieu),
laplacienne (bas).

Évolution du modèle

(Chapeau-Blondeau & al., *Electronics Letters* 2001)

Un gain non stationnaire $g(k) = (k - k_0)^b$

pour modifier l'exposant β de la longue dépendance :

$$X(0) = Y(0) = 0$$

$$k = 1; k_0 = 0$$

Répéter

$$g(k) = (k - k_0)^b$$

$$X(k) = X(k - 1) + g(k)x(k)$$

$$Y(k) = \max[Y(k - 1), X(k)]$$

$$y(k) = Y(k) - Y(k - 1)$$

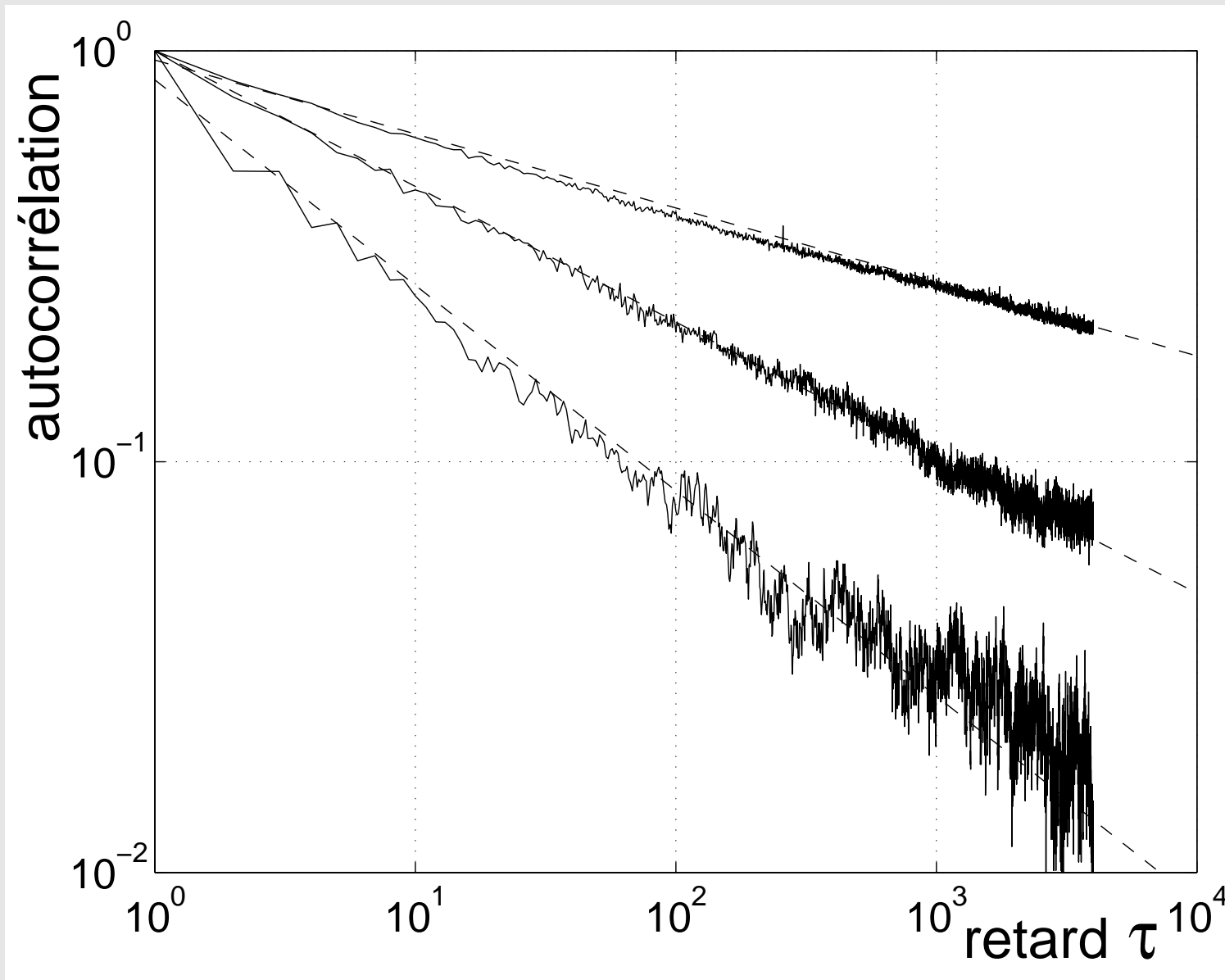
Si $y(k) > 0$ alors $k_0 \leftarrow k$ Fin Si

$$k \leftarrow k + 1$$

Jusqu'à demande d'arrêt

Autocorrélation de $y(k)$

L'exposant b du gain contrôle l'exposant β des corrélations :



Haut : $b = 0.4$

$\implies \beta = 0.19$

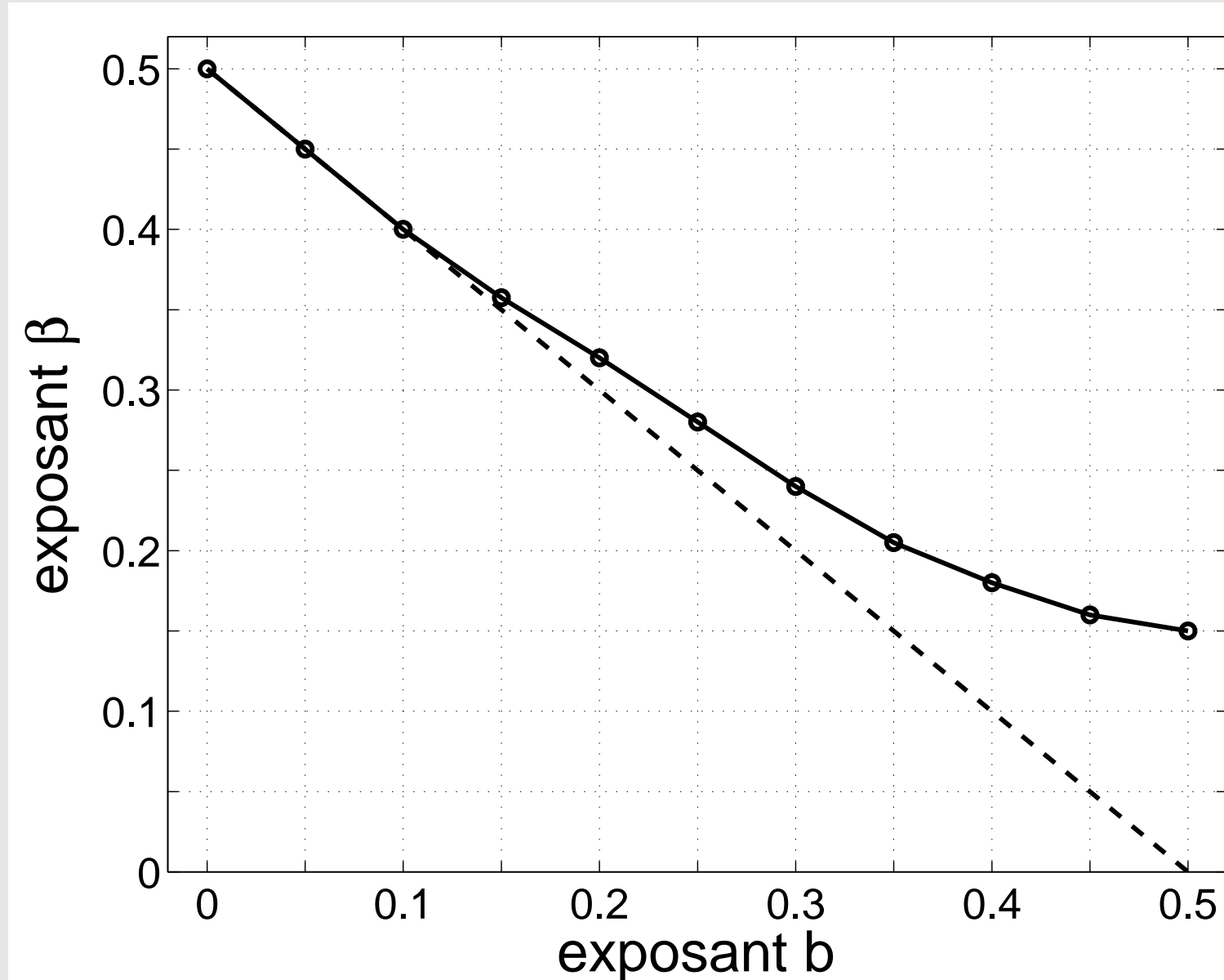
Milieu : $b = 0.2$

$\implies \beta = 0.33$

Bas : $b = 0$

$\implies \beta = 0.50$

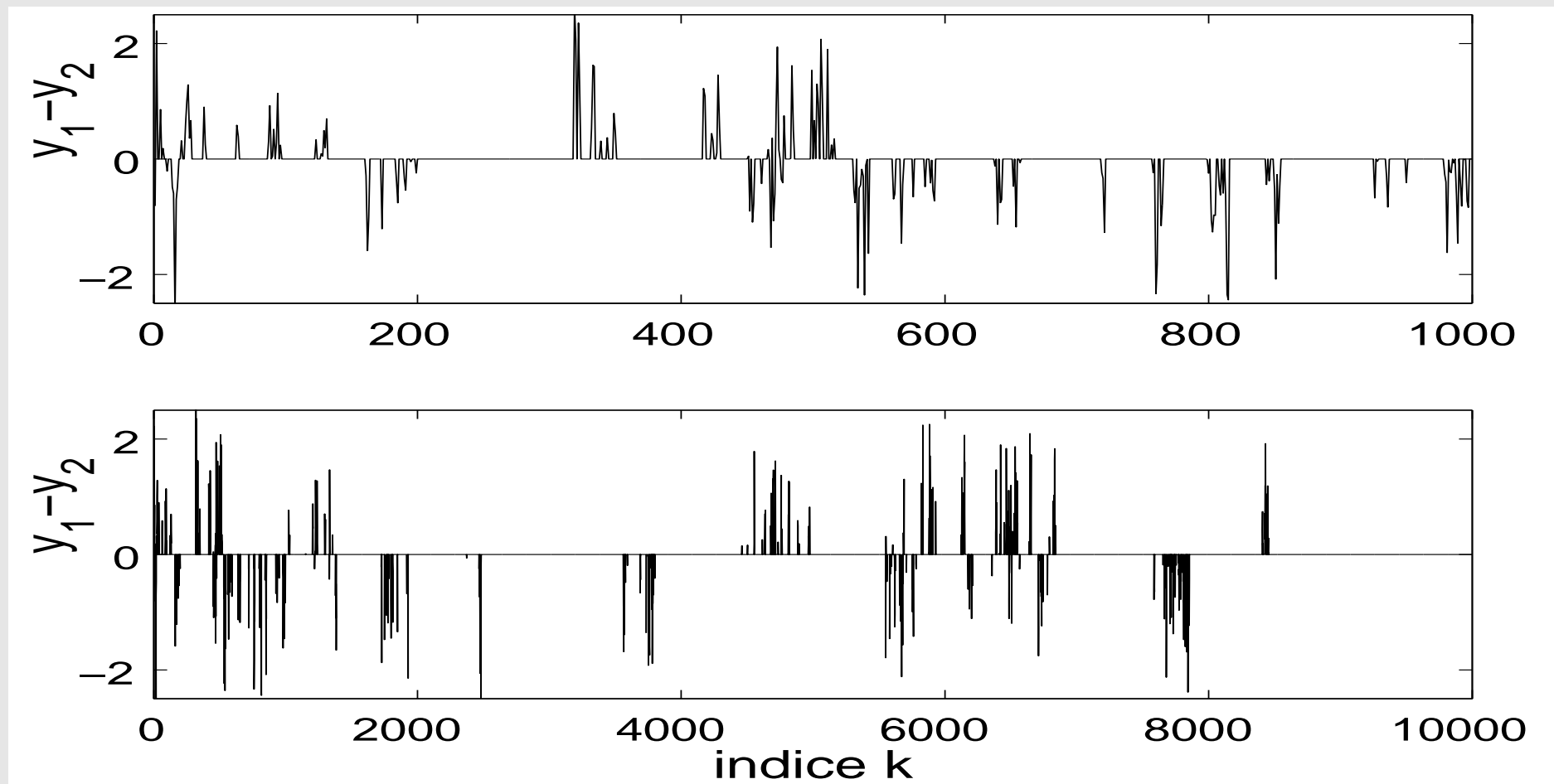
Loi empirique pour l'exposant β des corrélations en fonction de l'exposant b du gain :



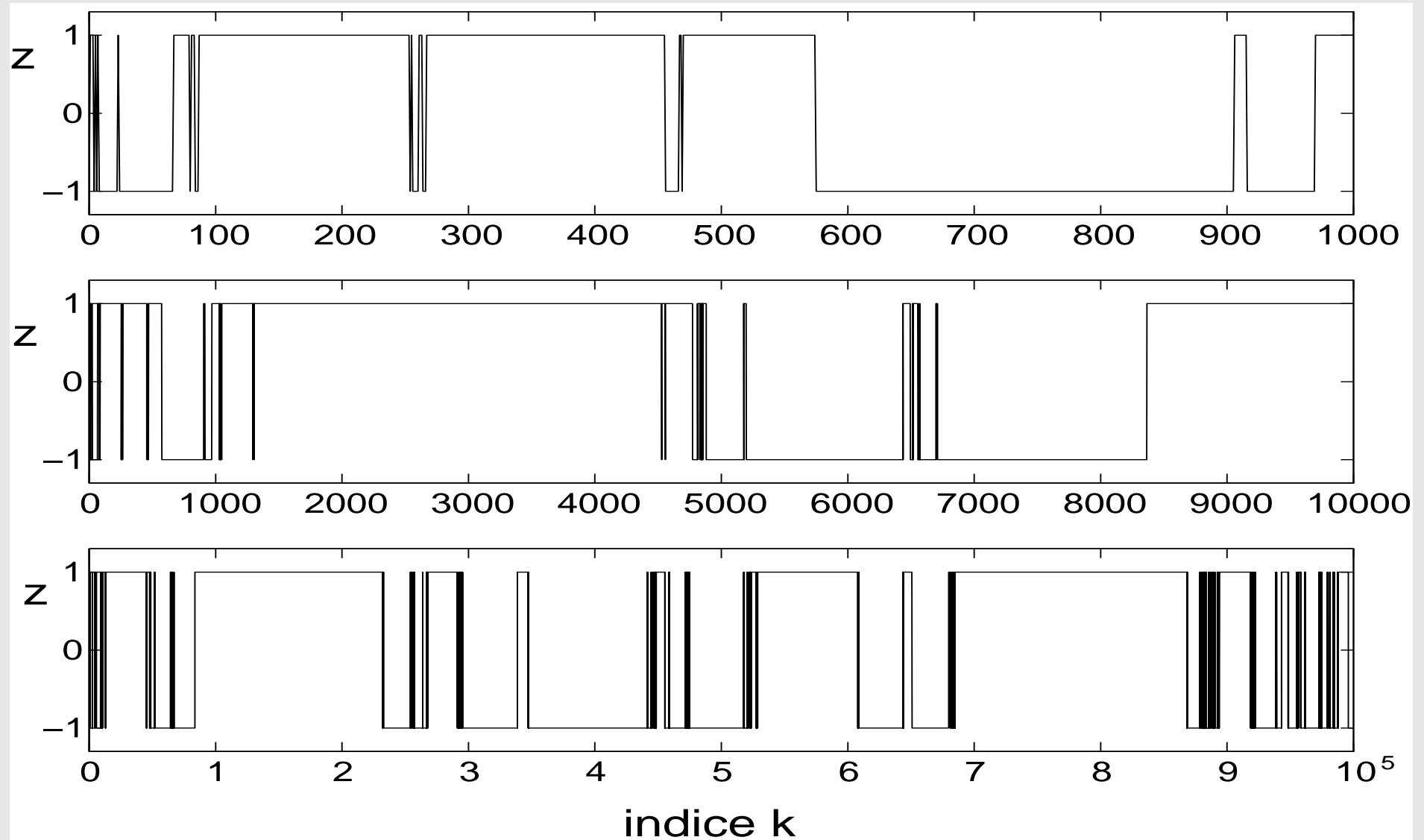
Autres évolutions du modèle

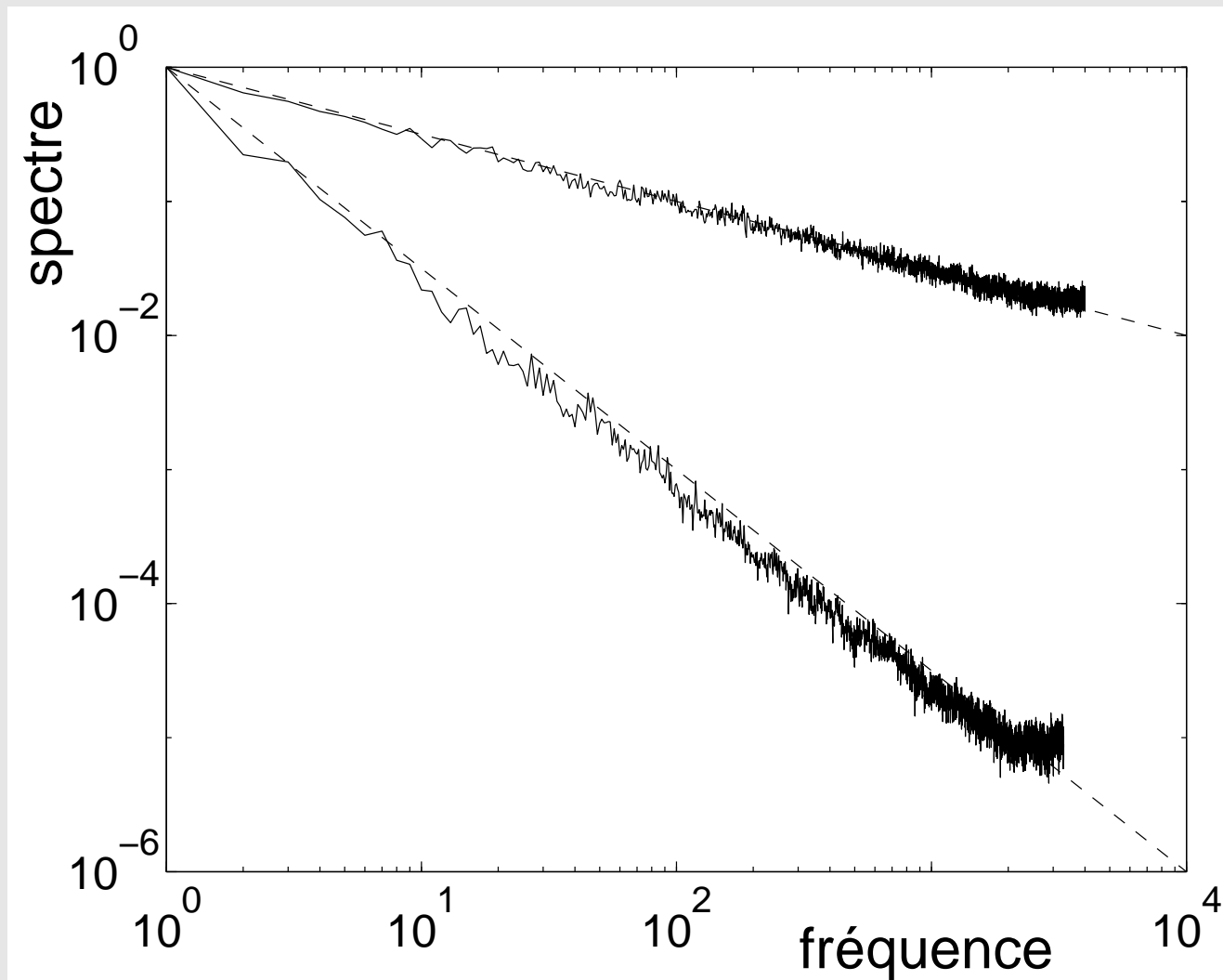
Utiliser le signal $y(k)$ produit par la dynamique max-plus, pour générer, moduler, déclencher, des processus auxiliaires.

Signal $y_1(k) - y_2(k) = s(k)$:



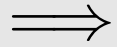
Signal on/off $z(k)$ déclenché par $y(k)$:





$s(k)$ bruit en $1/f^{0.5}$,
 $z(k)$ bruit en $1/f^{1.5}$.

Donc, un modèle de signal aléatoire
avec des propriétés fractales (autosimilarité statistique).



Problèmes ouverts

- **Problèmes de math.** : analyse théorique, enrichissement/évolution du modèle, ...
- **Applications** : Simulation de processus soumis à des signaux aléatoires fractals : trafic des réseaux informatiques, ...
-

Signaux fractals par transformations itérées

(Barnsley & al., *Proc. Roy. Soc. London* 1985)

Systèmes de transformations itérées :

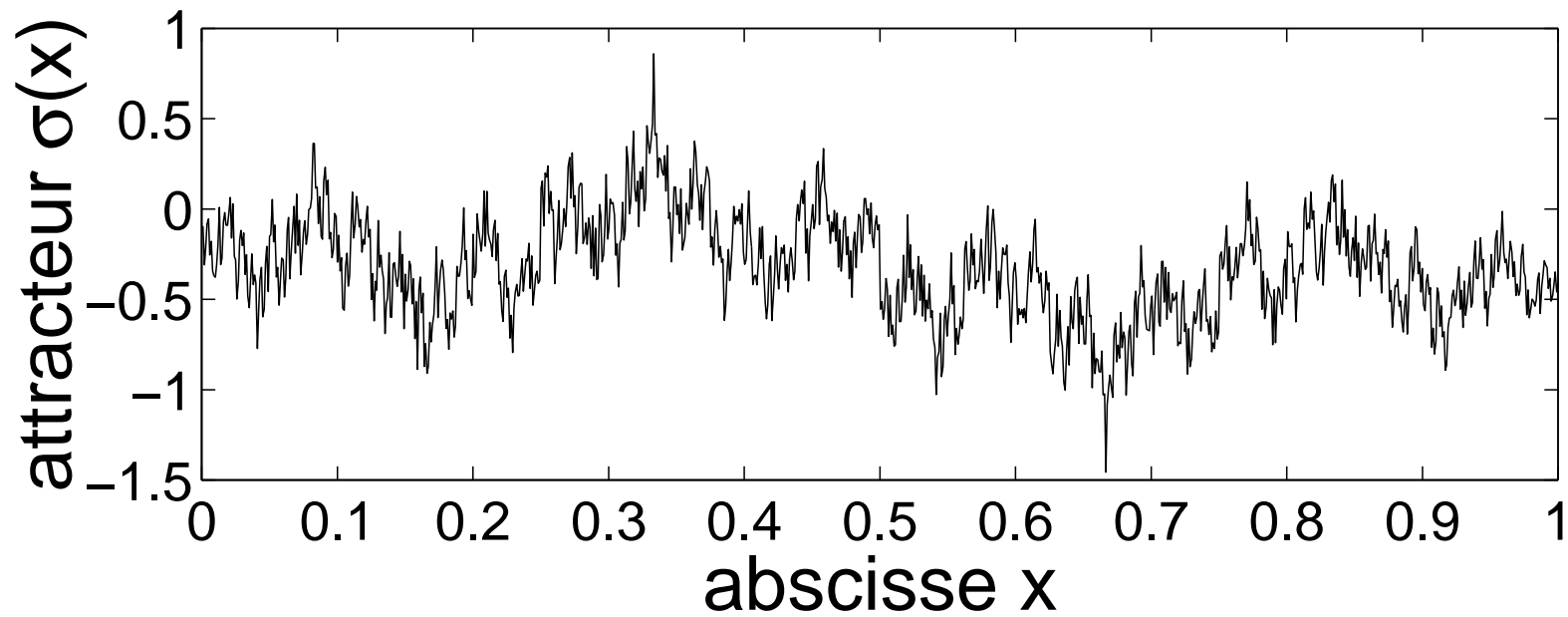
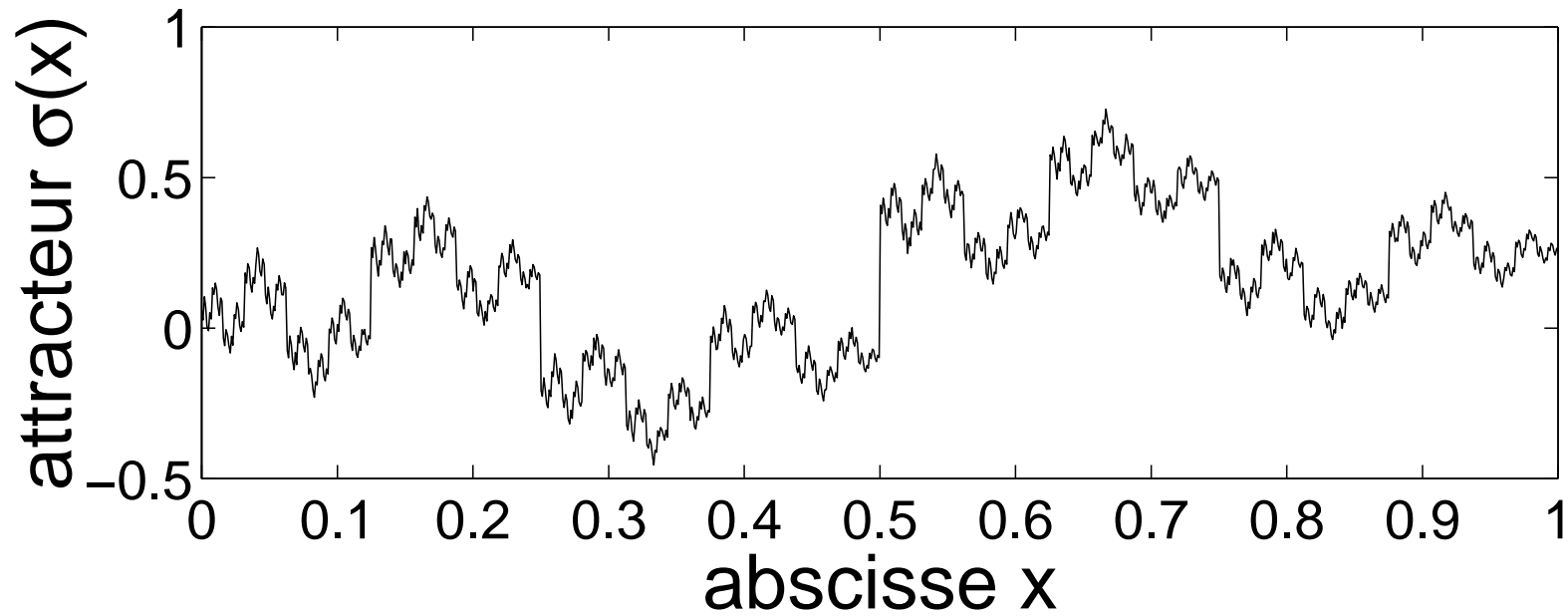
$$T_1 \left| \begin{array}{l} [0, 1[\times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1/2[\times \mathbb{R} \\ (x, s(x)) \longmapsto (x/2, a_1 s(x) + b_1 + c_1 x) , \end{array} \right.$$

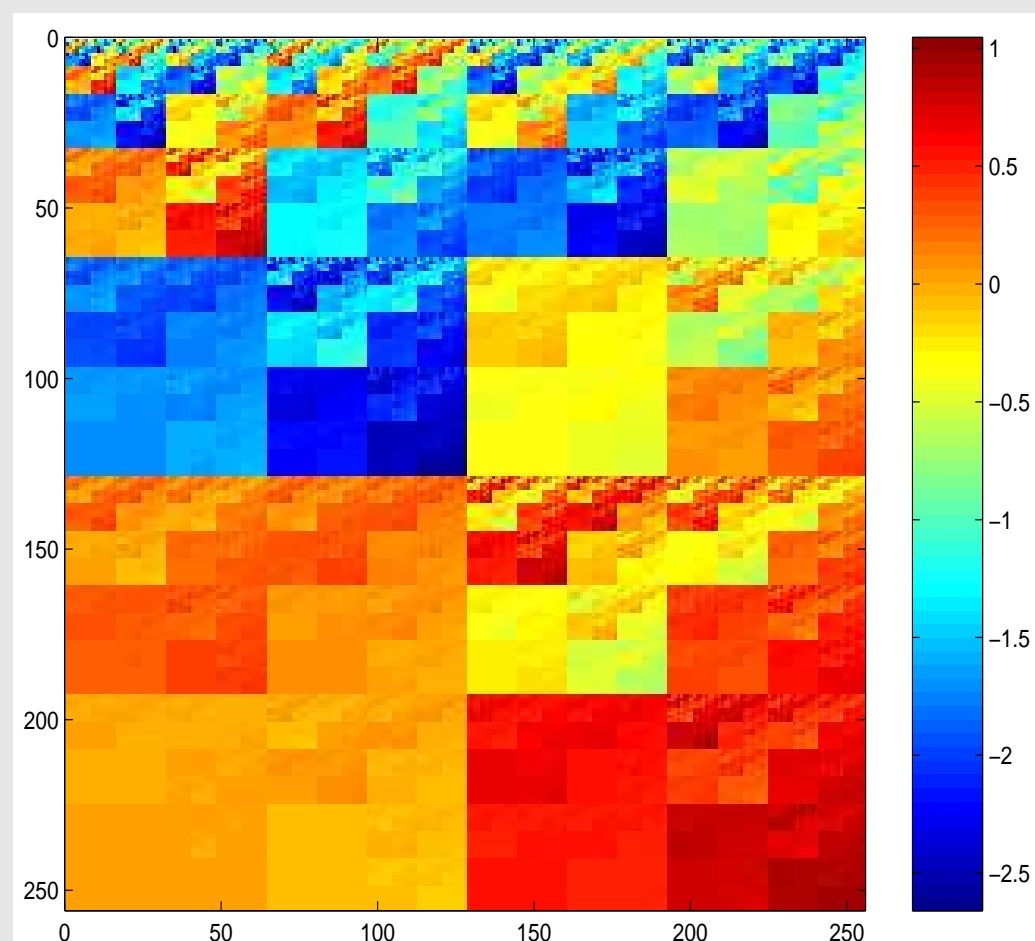
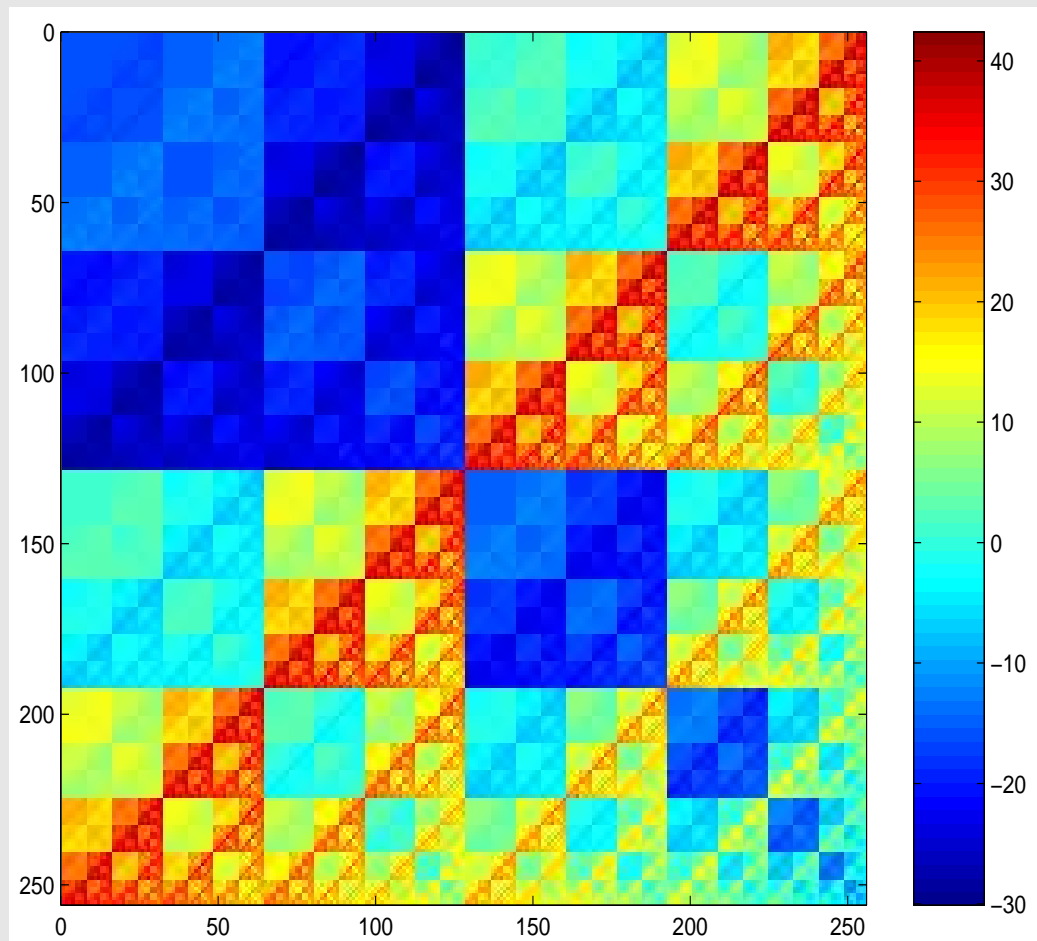
et

$$T_2 \left| \begin{array}{l} [0, 1[\times \mathbb{R} \longrightarrow [1/2, 1[\times \mathbb{R} \\ (x, s(x)) \longmapsto (1/2 + x/2, a_2 s(x) + b_2 + c_2 x) . \end{array} \right.$$

Transforme un signal $s(x)$ de support $x \in [0, 1[$ en un autre signal de même support.

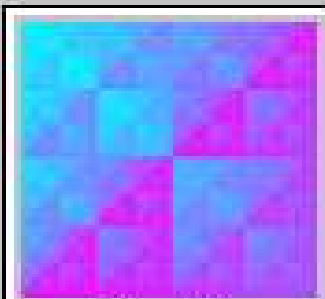
Transformation affine contractante (car $|a_1|$ et $|a_2| < 1$), qui converge vers un unique point fixe : attracteur $\sigma(x)$ **fractal**.



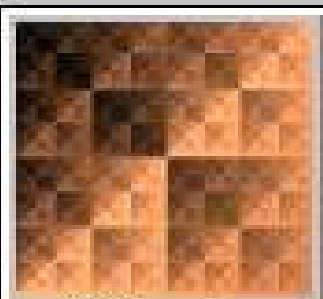


Modèles de signaux compliqués, avec un paramétrage parcimonieux.

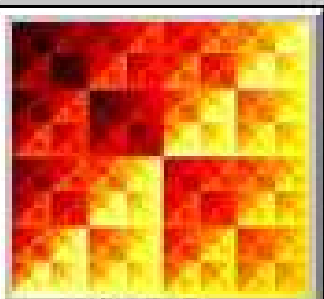
Une problématique : contrôler les propriétés de l'attracteur via les paramètres $\{(a_i, b_i, c_i)\}$ de la transformation.



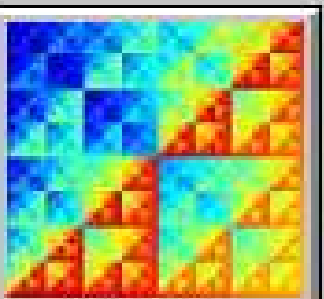
im2_cl.jpg



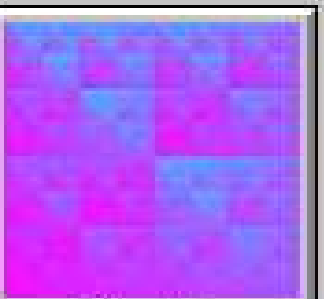
im2_cp.jpg



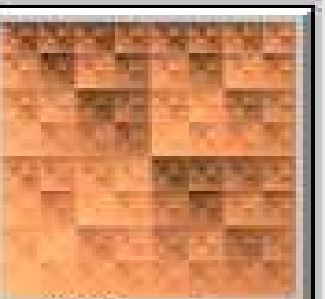
im2_ho.jpg



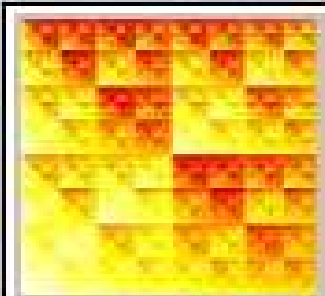
im2_je.jpg



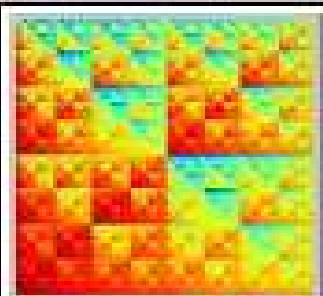
im3_cl.jpg



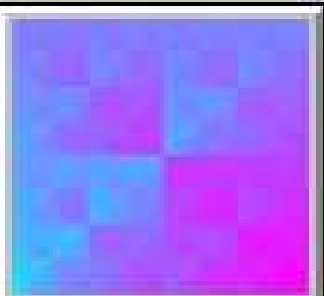
im3_cp.jpg



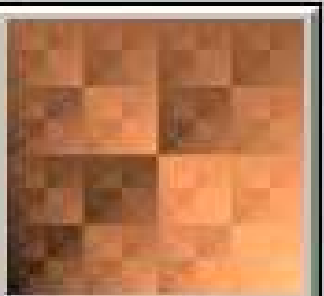
im3_ho.jpg



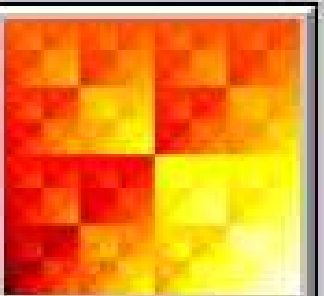
im3_je.jpg



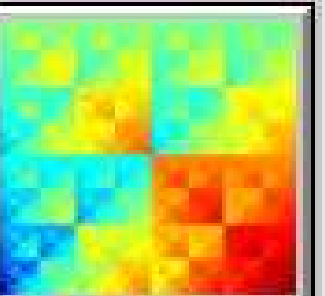
im4_cl.jpg



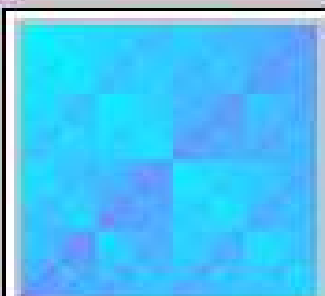
im4_cp.jpg



im4_ho.jpg



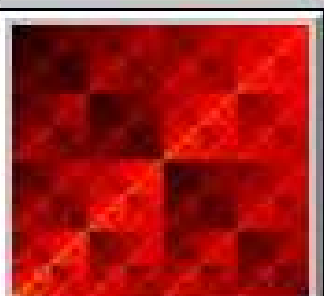
im4_je.jpg



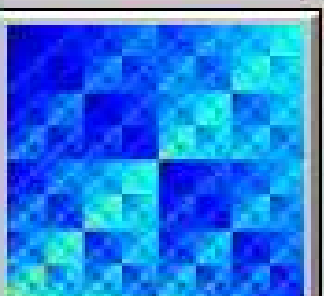
im5_cl.jpg



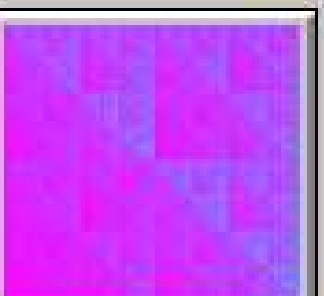
im5_cp.jpg



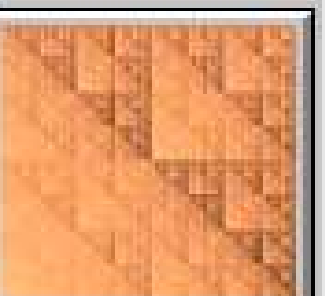
im5_ho.jpg



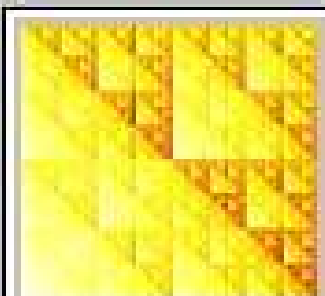
im5_je.jpg



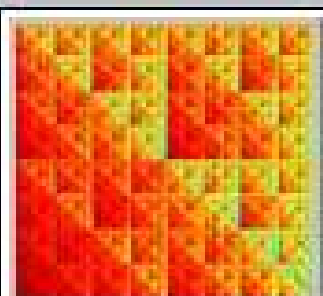
im6_cl.jpg



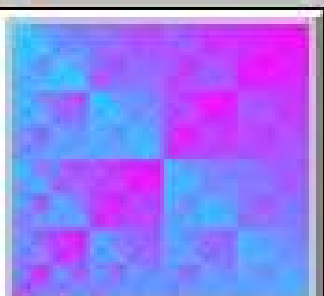
im6_cp.jpg



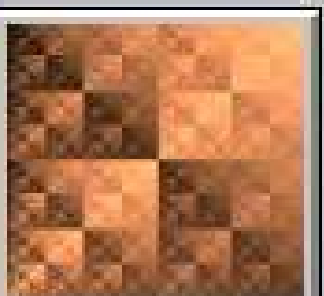
im6_ho.jpg



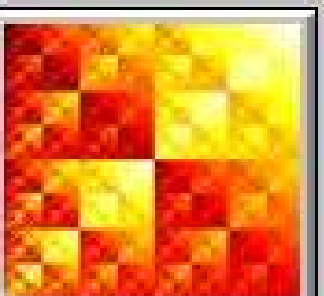
im6_je.jpg



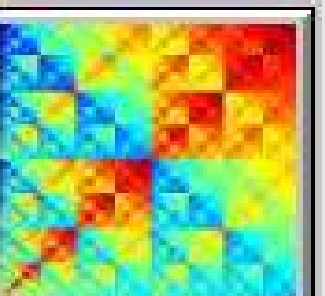
im7_cl.jpg



im7_cp.jpg



im7_ho.jpg



im7_je.jpg

En contrôlant les transformations itérées,
on impose les propriétés de l'attracteur fractal :

- dimension fractale,
- continuité ou discontinuité,
- moments géométriques, coefficients de Fourier ou en ondelettes, ...
- l'évolution des propriétés fractales lors de projections.

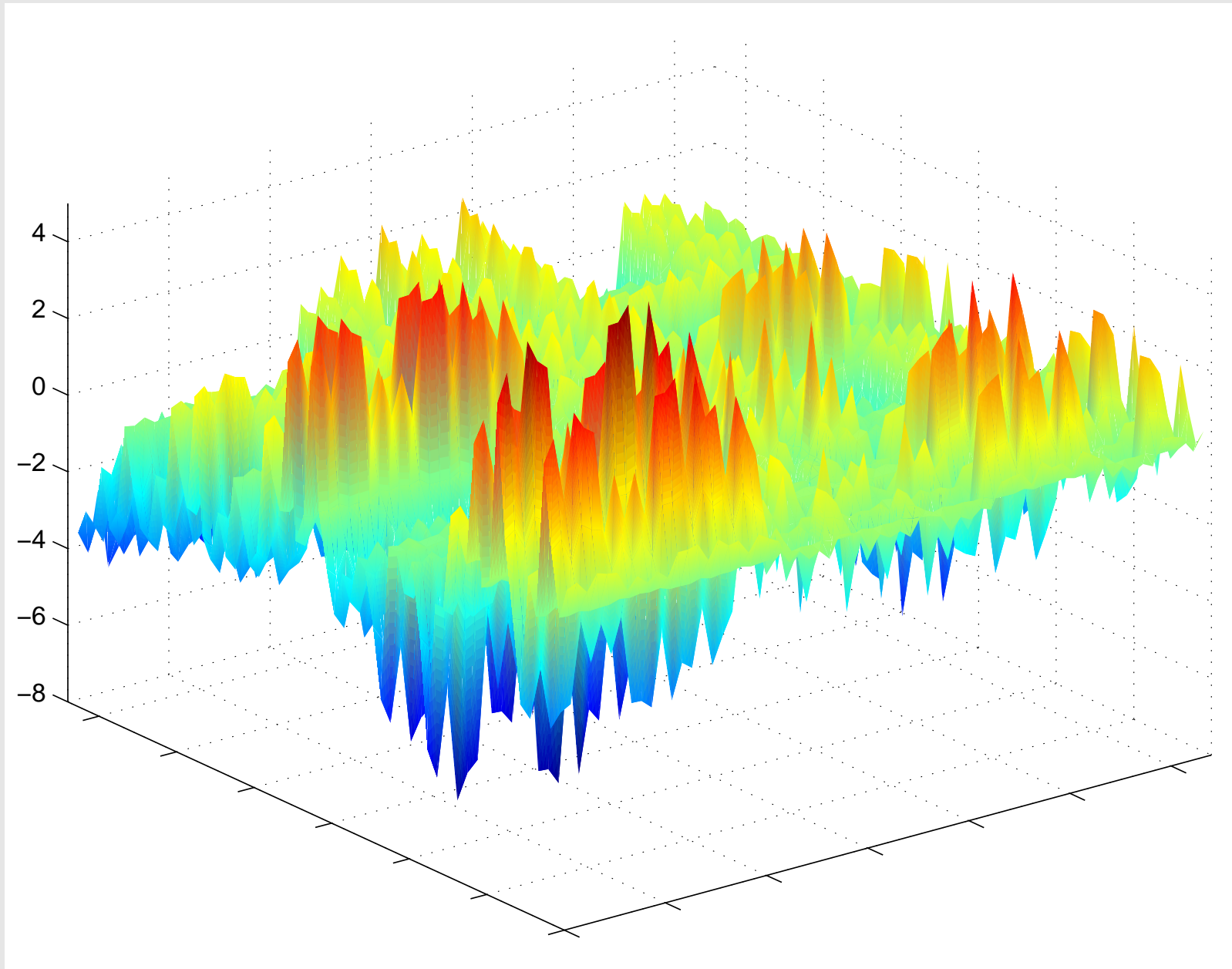


Image fractale continue de dimension fractale $D = 2.6$.

Donc, un modèle de signaux, ou images, ou structures 3D, ou nD , avec des propriétés fractales contrôlées.

⇒

Problèmes ouverts

- **Problèmes de math.** : analyse théorique, enrichissement/évolution du modèle, ...
- **Applications** : codage/compression d'images, test d'algorithmes de caractérisation de fractales, ...
-

Les formations à l'Université d'Angers

Masters “Sciences, Technologies et Santé”

À l'UFR Sciences d'Angers :

Master mention “Matériaux Fonctionnels, Signaux et Photonique”

- Spécialité Pro. “Ingénierie en Optoélectronique, Signal, Imagerie”,
- Spécialité Recherche “Capteurs Optiques et Instrumentation”.

À l'ISTIA :

Master mention “Ingénierie des Systèmes Industriels et des Projets”

- Spécialité Recherche “Systèmes Dynamiques et Signaux”.