Université d'Angers	Département Informatique
Faculté des Sciences	L3 mention Informatique, Année 04/05
Module : *Démonstration Automatique*	Jean-Michel Richer

Examen (*1ère Session*)

Avertissement
Il sera tenu compte dans la notation de la présentation
Tous documents autorisés
Bonne chance !

Exercice 1 - (8 pts) -

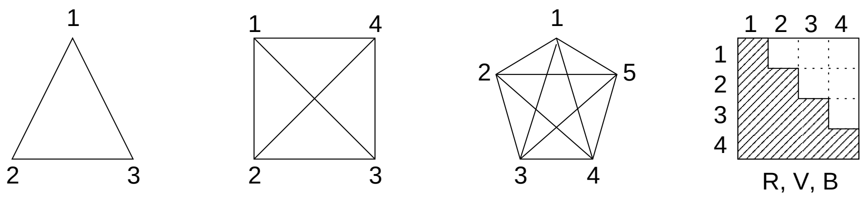

FIG. 1 – Ramsey 3, 4 et 5 et matrice pour Ramsey 4

Le problème de *Ramsey* consiste à colorier un graphe complet de N sommets avec trois couleurs (rouge, vert, bleu) sans qu'apparaisse de triangle monochromatique. Pour représenter ce problème on utilise 3 matrices carrées R, V, B de variables propositionnelles dont on garde la partie supérieure (cf. figure 1). Ainsi la variable $R[1,2]$ (notée $R_{1,2}$) à vrai signifie que l'arc entre les sommets 1 et 2 est colorié en rouge.

On considère le problème de Ramsey pour $N = 3$ sommets.

1. exprimez à l'aide des contraintes de cardinalité le fait que chaque arc $(1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 3)$ est d'une seule couleur. On rappelle que l'opérateur de cardinalité
$$\#(\alpha,\, \beta,\, p_1, \dots, p_n)$$
signifie qu'au moins α et au plus β littéraux parmi $p_1, \dots, p_n$ doivent être vrai,
2. de même, exprimez le fait que le triangle $(1, 2, 3)$ n'est pas monochromatique : les trois arcs rouge ne peuvent pas être tous à vrai (autrement dit on a au plus deux arcs rouges) , de même pour les trois arcs vert et les trois arcs bleu.
3. montrer que le problème est consistant (possède une solution) en utilisant le système de déduction suivant :

$$\frac{\vdash \#(\alpha_1,\, \beta_1,\, \mathcal{L}_1) \qquad \vdash \#(\alpha_2,\, \beta_2,\, \mathcal{L}_2)}{\vdash \#(\alpha_1 + \alpha_2,\, \beta_1 + \beta_2,\, \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)}\ (Add) \qquad \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$$

$$\frac{\vdash \#(\alpha_1,\, \beta_1,\, \mathcal{L}) \qquad \vdash \#(\alpha_2,\, \beta_2,\, \mathcal{L})}{\vdash \top}\ (Success) \qquad \{\alpha_1, \beta_1\} \cap \{\alpha_2, \beta_2\} \neq \emptyset$$

$$\frac{\vdash \#(\alpha_1,\, \beta_1,\, \mathcal{L}) \qquad \vdash \#(\alpha_2,\, \beta_2,\, \mathcal{L})}{\vdash \bot}\ (Failure) \qquad \{\alpha_1, \beta_1\} \cap \{\alpha_2, \beta_2\} = \emptyset$$

4. ce problème possède des solutions jusqu'à $N = 16$. Pour $N \geq 17$, on obtiendra toujours au moins un triangle monochromatique. De combien de variables propositionnelles se compose le problème de Ramsey pour $N = 17$?

Exercice 2 - (4 pts) -

Un étudiant se demande si à partir de l'ensemble d'axiomes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{c} \neg p \vee \neg q \vee r \\ p \vee q \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad (S) \left\{ \begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow r \\ p \vee q \end{array} \right\}$$

on peut en déduire r, en d'autres termes : a-t-on le droit de réaliser une double unification ?

Le meilleur moyen d'en être sûr est de vérifier si r découle de (S). Faîtes la vérification en utilisant le calcul des séquents.

Exercice 3 - (8 pts) - Soit l'ensemble de clauses suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} (C1) & p \vee q \vee r \vee s \\ (C2) & \neg p \vee q \vee r \\ (C3) & \neg r \vee s \\ (C4) & q \vee \neg s \\ (C5) & p \vee \neg q \vee r \\ (C6) & \neg p \vee \neg q \\ (C7) & p \vee \neg r \vee \neg s \end{array} \right.$$

Démontrer l'insatisfiabilité de (S) par les méthodes suivantes :

1. génération de modèles
2. ensemble support

L'utilisation de l'hyperrésolution serait elle intéressante ? Expliquer pourquoi (ne pas résoudre).